J. A. SERRET
MEMÈRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES, PROFESSEUR
AU COLLÈGE DE FRANCE ET À LA FACULTÈ DES SCIENCES DE PARIS

15 22/610

ТРИГОНОМЕТРІЯ

Прямолинейная тригонометрія.—Сферическая тригонометрія.—Теорія круговыхъ функцій.

ПОЛНЫЙ ПЕРЕВОДЪ СЪ 8-ГО ФРАНЦУЗСКАГО ИЗДАНІЯ

Владислава Вроблевскаго

ПОДЪ РЕДАКЦІЕЙ

И. Иванова

МАГИСТРА МАТЕМАТИКИ

Приват. доцента С.-Петербургскаго Императорскаго Университета, преподавателя Института Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I и Высшихъ Женскихъ Курсовъ.

Учен. Ком. Минист. Нар. Просв. допущена въ ученическія, старшаго возраста, библіотеки среднихъ учебныхъ заведеній.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
ИЗДАНІЕ В. И. ГУБИНСКАГО.

Изданія В. И. ГУБИНСКАГО. С.-Петербургъ.

Кузнечное мастерство. Общепонятное руководство. Сост. В. Остерманъ подъ реда
инженеръ-технолога Сергѣева. Ц. 40 к.
Слесарное мастерство. Общеполезное руководство. Сост. Остерманъ подъ редакціей
неръ-технолога Сергѣева съ рисунками Спб. 1904 г. Ц. 45 к.
Гальванопластика. Никкелированіе, золоченіе, и серебреніе, и электрометаллургія (
доступное руководство). Проф. Э. Боана, перев. съ французск. Федорова. Съ 26 рису
Спб. 1907 г. Ц. 90 к.
Домашній электротехникъ. Д-ръ Альфредъ фонъ-Урбаницкій. Общедоступное руков
къ устройству и установкѣ электрическихъ приборовъ по электромагнитной телеграфіи,
фоніи, сигнализаціи, гальванопластикѣ и электрическому освѣщенію. По 5-му изданію о
талъ и дополнилъ техн. П. А. Федоровъ. 259 рис. въ текстѣ. Спб. 1904 г. Ц. 1 руб. 35
Электричество. Во всѣхъ видахъ. Популярное изложеніе проф. Л. Грэца. Переводъ
пинскаго, съ 143 рис. Спб. 1900 г. Ц. 1 р. 20 к. Буду надѣяться, какъ говоритъ авторъ въ
предисловіи, что въ этой книгѣ, при всей ея краткости, я никогда не упускалъ изъ виду
гой точности понятій и выводовъ, которые будутъ способствовать основательному знак
съ электричествомъ, какъ предметомъ наиболѣе загадочнымъ изъ всѣхъ извѣстныхъ нам
природы.
Машинистъ-практикъ. Руководство для машинистовъ и качегаровъ. Сост. Брау
Шпенратъ. Перев. съ нѣмецкаго Остермана. Подъ редакціею инж.-тех. Г. П. Артюшк
40 рис. Спб. Ц. 40 к.
Спутникъ машиниста. Руководство для кочегаровъ, машинистовъ, начинающихъ конс
ровъ, инженеровъ, заводчиковъ, техническихъ учебныхъ заведеній и пр. и пр. Сост.
обработанное проф. Брауеромъ при содѣйствіи проф. Релло. Съ исправленнаго и значи
дополненнаго послѣдняго (одиннадцатаго) нѣмецкаго изданія. Перевелъ В. В. Остерман
редакціей инж.-тех. Д. Д. Сухаржевскаго. Съ 560 рисунками въ текстѣ и отдѣльными
цами. Спб. Ц. 2 руб.
Спутникъ механика. Практическая справочная книга для механиковъ, техниковъ,
ковъ техническихъ учебныхъ заведеній и пр. Составилъ Бернули. Обработана профессо
гомъ. Переводъ съ 21 нѣмецкаго изданія инженеръ-механика Д. Голова. Спб. 500
250 чертежами. Ц. 1 руб. 50 к. По полнотѣ и универсальности содержанія, соединенн
общедоступностью изложенія, эта книжка является, можно сказать, единственной въ т
ской литературѣ, чѣмъ и объясняется ея распространенность въ Германіи, гдѣ она в
вастъ уже 21-е изданіе. Она содержитъ необходимыя справочныя свѣдѣнія для те
всякаго рода, строителей и указателей, а также для владѣльцевъ различныхъ мастерски
Динамомашины, электродвигатели, аккумуляторы. проф. Бисканъ и инж.
Около 150 стр. со 109 рис. въ текстѣ. Краткое содержаніе: Предварительныя поня
электричествѣ.—Дѣйствія электр. тока.—Законъ Ома.—Машины для полученія тока.—
постояннаго тока.—Машины перемѣннаго тока.—Аккумуляторы—Вспомогательные при
Подача помощи при несчастныхъ случаяхъ. Спб. цѣна 75 коп.
Спутникъ кочегара. Состав. Брауэръ и Шпенратъ. Переводъ инж.-тех. Д. Сухар
съ 96 рис. Спб. Ц. 40 к. Отопленіе парового котла производится съ цѣлью обращать
чающуюся въ немъ воду въ паръ, который долженъ обладать извѣстнымъ, достаточно в
давленіемъ, для производства опредѣленной механической работы. Поэтому людямъ,
занности которыхъ лежитъ уходъ за котлами, необходимо имѣть нѣкоторое понятіе о
и о способѣ ея полученія, о свойствахъ воды и водянаго пара, затѣмъ о механическ
ратахъ, которые являются необходимыми для полученія пара высокаго давленія,
для примѣненія этого пара, т.-е. о паровыхъ котлахъ и арматурахъ.
1750 практическихъ техно-химическихъ рецептовъ. Новѣйшія открытія,
шенствованія и патентованныя изобрѣтенія въ областяхъ производствъ: альбуминна
куреннаго, водочнаго, воскобойнаго, гальванопластики, дрожжеваго, каучуковаго, клее
кожевеннаго, косметическаго, красильнаго, красочнаго, крахмальнаго, лаковаго, масло
еталлургіи, механическихъ издѣлій, мукомольнаго, мыловареннаго, нефтянаго, пивов
счебумажнаго, сахарнаго, свѣчнаго, скорняжнаго, слесарнаго, спичечнаго, стекол
чаго, сургучнаго, уксуснаго, фарфороваго, фаянсоваго и проч. Ц. 1 р. 50 к.
тникъ паровознаго машиниста. Руководство для паровозныхъ кочегаровъ
ть, Брозіусъ и Кохъ. Переводъ съ послѣдняго изданія В. Остермана, подъ
х. Д. Сухаржевскаго, съ 306 рис. Спб. Ц. 1 р. 25 к.
ческій мыловаръ. Или подробное руководство къ фабрикаціи всѣхъ сорто
щихся въ продажѣ. Съ 44 рис. Сост. Г. Фифера. Переводъ съ послѣдняго
Дмитріева. Спб. Ц. 1 руб. 35 к.

J. A. SERRET

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES, PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE ET A LA FACULTÈ DES SCIENCES DE PARIS

22
610

ТРИГОНОМЕТРІЯ

Прямолинейная тригонометрія.—Сферическая тригонометрія.—Теорія круговыхъ функцій.

ПОЛНЫЙ ПЕРЕВОДЪ СЪ 8-ГО ФРАНЦУЗСКАГО ИЗДАНІЯ

Владислава Вроблевскаго

ПОДЪ РЕДАКЦІЕЙ

И. Иванова

МАГИСТРА МАТЕМАТИКИ

Привать доцента С.-Петербургскаго Императорскаго Университета, преподавателя Института Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I и Высшихъ Женскихъ Курсовъ.

Учен. Ком. Минист. Нар. Просв. допущена въ ученическія, старшаго возраста, библіотеки среднихъ учебныхъ заведеній.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
ИЗДАНІЕ В. И. ГУБИНСКАГО.

Государственная
БИБЛИОТЕКА
СССР
им. В. И. Ленина
11763-56

Текстъ нап

Обложка и титулъ напечатаны въ типографіи Спб. тюрьмы, Арсен. наб., 5.

ТРИГОНОМЕТРІЯ

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ ТЕОРІИ КРУГОВЫХЪ ФУНКЦІЙ.

Опредѣленіе слова функція.

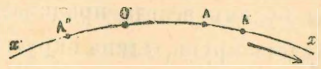
1. Если двѣ *перемѣнныя* величины таковы, что каждому значенію одной изъ нихъ соотвѣтствуетъ опредѣленное значеніе другой, то говорятъ, что эти величины суть *функціи* одна другой. Напримѣръ, въ кругѣ окружность и площадь круга суть функціи радіуса; и, наоборотъ, радіусъ есть функція окружности или площади круга.

Тригонометрія основывается на теоріи нѣкоторыхъ функцій, которыя получаются при разсмотрѣніи круга и которыя потому называются *круговыми функціями*. Мы начнемъ съ изложенія элементовъ этой теоріи.

Измѣреніе длины.

2. Пусть O (фиг. 1) будетъ опредѣленная точка на какой нибудь линіи $x'x$, прямой или кривой. Начиная отъ этой точки O, возьмемъ на линіи $x'x$ различныя длины OA, OA', OA'' . . . ; эти длины, будучи отнесены къ общей единицѣ, выразятся

Фиг. 1.



числами и мы поставимъ предъ этими числами знакъ + или —, смотря потому, будутъ ли длины, которыя выражаются упомянутыми числами, взяты въ томъ или въ другомъ направленіи отъ точки O. Другими словами, длины, взятыя въ одномъ

направленіи отъ точки O (выбранномъ произвольно), будутъ количествами *положительными*, а въ другомъ—количествами *отрицательными*.

Если мы примемъ направленіе отъ O къ x, указанное стрѣлкою, за направленіе положительныхъ длинъ, и предположимъ, что точки A, A', A'' расположены соотвѣтственно на разстояніяхъ 7, 9, 6 метровъ отъ O, то, взявъ метръ за линейную единицу, выразимъ длины OA, OA', OA'' соотвѣтственно числами $+7$, $+9$, -6. Предположимъ, что a обозначаетъ положительное или отрицательное число, которое выражаетъ нѣкоторую длину, считаемую на линіи $x'x$ отъ точки O; число единицъ, заключающихся въ этой длинѣ, будетъ $+a$ или $-a$, смотря потому, будетъ ли число a положительное или отрицательное.

Вообразимъ теперь подвижную точку, начавшую свое движеніе изъ O и движущуюся то въ одномъ, то въ другомъ направленіи. Различныя части линіи $x'x$, описываемыя этою подвижною точкою, будутъ разсматриваться какъ положительныя или какъ отрицательныя, смотря потому, были ли онѣ описаны при движеніи по направленію Ox, или по противоположному направленію Ox'; и если обозначимъ чрезъ a, b, c, d..... положительныя или отрицательныя количества, которыми измѣряются длины, послѣдовательно описанныя такою подвижною точкою, а чрезъ x количество, которое выражаетъ разстояніе отъ точки O до точки, гдѣ движеніе прекращается, то будемъ имѣть для всѣхъ случаевъ

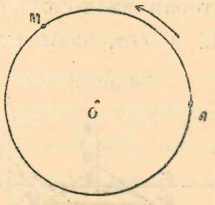
$$x=a+b+c+d+\ldots.$$

О дугахъ круга.

3. При изученіи функцій, получаемыхъ при разсмотрѣніи круга, радіусъ послѣдняго мы будемъ всегда принимать за единицу.

Пусть O (фиг. 2) будетъ кругъ, длина окружности котораго выражается чрезъ 2π, а длина квадранта (четверти окружности) чрезъ $\frac{\pi}{2}$. Пусть A будетъ постоянная точка на окружности, а M подвижная точка, начинающая свое движеніе изъ A и движущаяся по направленію AB, указанному стрѣлкою, которое мы примемъ за направленіе *положительныхъ дугъ*; дуга AM въ началѣ движенія равна нулю; потомъ она увеличивается и ея величина будетъ равна 2π, когда подвижная точка возвратится въ точку, съ которой началось движеніе. Но можно вообразить, что движеніе продолжается неопредѣленно, и что, слѣдовательно, подвижная точка можетъ описать дугу, состоящую изъ одной или нѣсколькихъ окружностей. Если движеніе точки M будетъ происходить по направленію, противоположному тому, которое мы предположили, то описываемая ею дуга будетъ отрицательная, но ея *абсолютная величина* будетъ принимать всѣ значенія, начиная отъ нуля. Такимъ образомъ дуга круга есть количество, способное принимать всевозможныя значенія между $-\infty$ и $+\infty$.

Фиг. 2.



Неподвижный конецъ A перемѣнной дуги AM будемъ называть *началомъ дуги*.

Если α обозначаетъ одну изъ дугъ, которыхъ конецъ находится въ одной и той же точкѣ M, то всѣ дуги x, которыя имѣютъ тотъ же конецъ, будутъ выражаться формулою

$$x=2k\pi+\alpha,$$

гдѣ k обозначаетъ любое цѣлое число—положительное, отрицательное, нуль такъ какъ двѣ дуги, имѣющія одно и то же начало и одинъ и тотъ же конецъ, могутъ, очевидно, разниться одна отъ другой только на цѣлое число окружностей.

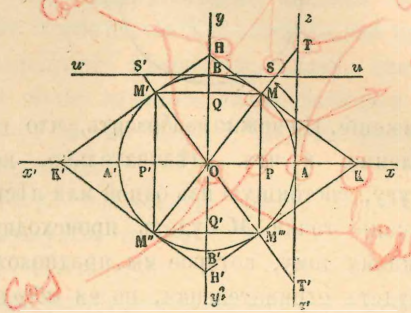
4. Дополнительныя и пополнительныя дуги. — Двѣ дуги, обѣ положительныя или одна положительная, а другая отрицательная, называются *дополнительными* или *дополненіями* одна относительно другой, когда ихъ сумма равна квадранту, т. е. равна $\frac{\pi}{2}$.

Двѣ дуги называются *пополнительными* или *пополненіями* одна другой, когда ихъ сумма равна полуокружности, т. е. равна π.

Опредѣленіе тригонометрическихъ линій.

5. Проведемъ (фиг. 3) чрезъ центръ круга O двѣ прямыя Ox и Oy, образующія прямой уголъ и пересѣкающія окружность, первая въ точкѣ A, а вторая въ точкѣ B; проведемъ затѣмъ чрезъ точки A и B прямыя Az и Bu, соотвѣтственно параллельныя Oy

Фиг. 3.



и Ox и направленныя въ ту же сторону, что и онѣ; мы знаемъ изъ геометріи, что прямыя Az и Bu будутъ касательными къ окружности. Продолжимъ, наконецъ, прямыя Ox, Oy, Az и Bu по направленію Ox', Oy', Az' и Bu'.

Примемъ точку A за начало дугъ, а направленіе отъ A къ B за направленіе положительныхъ дугъ. Кромѣ того, согласно п° 2, длины, взятыя отъ точки O на $x'x$ или на $y'y$, будутъ положительны, если онѣ откладываются по направленію отъ O къ x или отъ O къ y; наоборотъ, онѣ будутъ отрицательными, если откладываются по направленію отъ O къ x' или отъ O къ y'. Точно также длины, взятыя на $z'z$ отъ точки A, или на $u'u$ отъ точки B, будутъ положительными, если ихъ будемъ откладывать по направленію отъ A къ z или отъ B къ u, и, наоборотъ, онѣ будутъ отрицательными, если ихъ будемъ откладывать по направленію отъ A къ z' или отъ B къ u'.

Обозначимъ чрезъ x положительное или отрицательное количество, выражающее перемѣнную дугу, конецъ которой M можетъ принимать на окружности всевозможныя положенія; опустимъ перпендикуляръ MP на $x'x$ и перпендикуляръ MQ на $y'y$; продолжимъ радіусъ OM до пересѣченія съ $u'u$ въ точкѣ S и съ $z'z$ въ точкѣ T;

проведемъ, наконецъ, чрезъ точку M касательную HK, которая пересѣчетъ $y'y$ въ точкѣ H и $x'x$ въ точкѣ K: длина OQ или равная ей MP, взятая съ надлежащимъ знакомъ, называется *синусомъ* дуги x; длины AT и OK, взятыя также съ надлежащими знаками, будутъ *тангенсомъ* и *секансомъ* дуги x.

Такимъ образомъ можно установить слѣдующія опредѣленія:

Синусъ дуги есть положительное или отрицательное количество, которымъ измѣряется перпендикуляръ, опущенный изъ конца дуги на діаметръ, проходящій чрезъ начало той же дуги.

Тангенсъ дуги есть положительное или отрицательное количество, которымъ измѣряется часть касательной, проведенной чрезъ начало дуги, ограниченная діаметромъ, проходящимъ чрезъ конецъ дуги.

Секансъ дуги есть положительное или отрицательное количество, которымъ измѣряется часть діаметра, проведеннаго чрезъ начало дуги, заключающаяся между центромъ и касательною, проведенною къ концу дуги.

Косинусомъ, *котангенсомъ* и *косекансомъ* дуги называются синусъ, тангенсъ и секансъ дополнительной дуги.

Будемъ обозначать всегда чрезъ x перемѣнную дугу, которой конецъ находится въ точкѣ M; я говорю, что если мы будемъ разсматривать точку B какъ новое начало дугъ и если направленіе новыхъ положительныхъ дугъ будетъ отъ B до A, то конецъ дуги $\frac{\pi}{2}-x$ будетъ находится въ той же самой точкѣ M, что и конецъ дуги x.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ B есть начало дуги $\frac{\pi}{2}-x$, то, чтобы описать эту дугу, можно идти сперва отъ B къ A и затѣмъ, начиная отъ точки A, описать дугу $-x$, если за направленіе положительныхъ дугъ принять направленіе отъ B къ A, или же описать дугу x, предполагая, что направленіе положительныхъ дугъ есть направленіе отъ A къ B. Очевидно, что такимъ образомъ мы прійдемъ къ точкѣ M.

Отсюда слѣдуетъ, что косинусомъ дуги x будетъ длина MQ или равная ей OP, взятая съ надлежащимъ знакомъ, и что котангенсъ и косекансъ той же дуги соотвѣтственно равны длинамъ BS и OH, взятымъ каждая съ надлежащимъ знакомъ.

Синусъ, тангенсъ, секансъ, косинусъ, котангенсъ и косекансъ дуги x обозначаютъ чрезъ:

$$sinx,\ tangx,\ secx,\ cosx,\ cotx,\ cosecx,$$

и даютъ имъ общее названіе *тригонометрическихъ линій* или *круговыхъ функцій*.

Измѣненіе тригонометрическихъ линій.

6. Разсмотримъ, какимъ образомъ измѣняются шесть тригонометрическихъ линій дуги x, когда эта дуга измѣняется отъ 0 до $+\infty$ и отъ 0 до $-\infty$.

Если x увеличивается отъ 0 до $+\frac{\pi}{2}$, то всѣ шесть тригонометрическихъ линій остаются положительными; $sinx$ возрастаетъ отъ 0 до $+1$, переходя чрезъ всѣ промежуточныя значенія; $tangx$ возрастаетъ отъ 0 до $+\infty$, а $secx$ отъ 1 до $+\infty$.

Три другія линіи напротивъ того уменьшаются: $cosx$ уменьшается отъ 1 до 0; $cotx$ уменьшается отъ $+\infty$ до 0, а $cosecx$ отъ $+\infty$ до $+1$. Такимъ образомъ, обозначая чрезъ ε положительную дугу, которая уменьшается такъ, что ея предѣлъ равенъ нулю, будемъ имѣть

$$\begin{aligned} sin\,0&=0, & cos\,0&=+1,\\ tang\,0&=0, & cot\,lim\,\varepsilon&=+\infty,\\ sec\,0&=+1, & cosec\,lim\,\varepsilon&=+\infty, \end{aligned}$$

и

$$sin\frac{\pi}{2}=+1. \qquad cos\frac{\pi}{2}=0,$$

$$tang\,lim\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)=+\infty, \qquad cot\frac{\pi}{2}=0,$$

$$sec\,lim\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)=+\infty, \qquad cosec\frac{\pi}{2}=+1.$$

Если x возрастаетъ отъ $+\frac{\pi}{2}$ до $+\pi$, то $sinx$ и $cosecx$ остаются положительными, но четыре другія тригонометрическія линіи дѣлаются отрицательными; $sinx$ уменьшается отъ $+1$ до 0; $tangx$ увеличивается отъ $-\infty$ до 0; $secx$ увеличивается отъ $-\infty$ до -1; $cosx$ уменьшается отъ 0 до -1; $cotx$ уменьшается отъ 0 до $-\infty$ и $cosecx$ увеличивается отъ $+1$ до $+\infty$. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$tang\,lim\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)=-\infty, \quad sec\,lim\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)=-\infty,$$

и

$$\begin{aligned} sin\,\pi&=0, & cos\,\pi&=-1,\\ tang\,\pi&=0, & cot\,lim\,(\pi-\varepsilon)&=-\infty,\\ sec\,\pi&=-1, & cosec\,lim\,(\pi-\varepsilon)&=+\infty. \end{aligned}$$

Если x возрастаетъ отъ $+\pi$ до $+\frac{3\pi}{2}$, то $tangx$ и $cotx$ вновь становятся положительными, но четыре другія линіи отрицательны; $sinx$ уменьшается отъ 0 до -1; $tangx$ увеличивается отъ 0 до $+\infty$; $secx$ уменьшается отъ -1 до $-\infty$; $cosx$ увеличивается отъ -1 до 0; $cotx$ уменьшается отъ $+\infty$ до 0 и $cosecx$ увеличивается отъ $-\infty$ до -1. Такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$cot\,lim(\pi+\varepsilon)=+\infty, \quad cosec\,lim(\pi+\varepsilon)=-\infty,$$

и

$$sin\frac{3\pi}{2}=-1, \qquad cos\frac{3\pi}{2}=0,$$

$$tang\,lim\left(\frac{3\pi}{2}-\varepsilon\right)=+\infty, \qquad cot\frac{3\pi}{2}=0,$$

$$sec\,lim\left(\frac{3\pi}{2}-\varepsilon\right)=-\infty, \qquad cosec\frac{3\pi}{2}=-1.$$

Если x возрастаетъ отъ $\frac{3\pi}{2}$ до 2π, то $cosx$ и $secx$ становятся положительными, но четыре другія линіи отрицательны; $sinx$ возрастаетъ отъ -1 до 0; $tangx$ увеличивается отъ $-\infty$ до 0; $secx$ уменьшается отъ $+\infty$ до $+1$; $cosx$ увеличивается отъ 0 до $+1$; $cotx$ уменьшается отъ 0 до $-\infty$, а $cosecx$ уменьшается отъ -1 до $-\infty$. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$tang\,lim\left(\frac{3\pi}{2}+\varepsilon\right)=-\infty, \quad sec\,lim\left(\frac{3\pi}{2}+\varepsilon\right)=+\infty,$$

и

$$\begin{aligned} sin\,2\pi&=0, & cos\,2\pi&=+1,\\ tang\,2\pi&=0, & cot\,lim(2\pi-\varepsilon)&=-\infty,\\ sec\,2\pi&=+1, & cosec\,lim(2\pi-\varepsilon)&=-\infty. \end{aligned}$$

Если мы будемъ увеличивать x отъ 2π до 4π, или отъ 4π до 6π, или...., то шесть тригонометрическихъ линій будутъ періодически принимать тѣ же самыя величины и въ томъ же самомъ порядкѣ.

Если x уменьшается отъ 0 до $-\infty$, то $cosx$ и $secx$ принимаютъ тѣ же самыя значенія, которыя они имѣли при возростаніи x отъ 0 до $+\infty$; четыре другія тригонометрическія линіи принимаютъ также тѣ же, по абсолютной величинѣ, значенія, но съ обратными знаками. Это можно тотчасъ провѣрить, замѣтивъ, что концы двухъ равныхъ и съ обратными знаками дугъ x и $-x$ расположены по одну и ту же сторону yy' и на одинаковыхъ разстояніяхъ отъ xx'. Такимъ образомъ будемъ имѣть для всякаго x:

$$sin(-x)=-sinx, \qquad cos(-x)=cosx,$$
$$tang(-x)=-tangx, \qquad cot(-x)=-cotx,$$
$$sec(-x)=secx, \qquad cosec(-x)=-cosecx.$$

Такъ какъ тригонометрическія линіи принимаютъ тѣ же значенія, когда къ дугѣ прибавляютъ нѣкоторое число окружностей, то будемъ имѣть для всякаго x:

$$sin(2k\pi+x)=sinx, \qquad cos(2k\pi+x)=cosx,$$
$$tang(2k\pi+x)=tangx, \qquad cot(2k\pi+x)=cotx,$$
$$sec(2k\pi+x)=secx, \qquad cosec(2k\pi+x)=cosecx,$$

гдѣ k обозначаетъ неопредѣленное положительное или отрицательное цѣлое число.

7. Пусть x будетъ какая нибудь положительная или отрицательная дуга. Концы двухъ дугъ x и $x+\pi$, очевидно, находятся на концахъ одного и того же діаметра, почему ихъ синусы, ихъ косинусы, ихъ секансы и ихъ косекансы равны, но съ обратными знаками, тогда какъ ихъ тангенсы и ихъ котангенсы равны и имѣютъ одинаковые знаки. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$sin(\pi+x)=-sinx, \qquad cos(\pi+x)=-cosx,$$
$$tang(\pi+x)=tangx, \qquad cot(\pi+x)=cotx,$$
$$sec(\pi+x)=-secx, \qquad cosec(\pi+x)=-cosecx.$$

Такъ какъ функціи $tangx$ и $cotx$ не измѣняются, когда x увеличивается на π, то говорятъ, что эти функціи періодическія; π называется *амплитудою періода* или просто *періодомъ*. Четыре

другія тригонометрическія линіи суть также періодическія функціи x, но ихъ періодъ равенъ 2π. Дѣйствительно, мы видѣли, что тригонометрическія линіи не измѣняются, если x увеличивается на нѣкоторое число окружностей. Предыдущія уравненія показываютъ, что $sinx$, $cosx$, $secx$ и $cosecx$ мѣняютъ только знакъ, когда x увеличивается на полупериодъ π.

Если въ предыдущихъ уравненіяхъ перемѣнимъ x на $-x$ и примемъ во вниманіе формулы предыдущаго номера, то получимъ:

$$sin(\pi-x)=sinx, \qquad cos(\pi-x)=-cosx,$$
$$tang(\pi-x)=-tangx, \qquad cot(\pi-x)=-cotx,$$
$$sec(\pi-x)=-secx, \qquad cosec(\pi-x)=cosecx.$$

откуда слѣдуетъ, что *если двѣ дуги пополнительны одна другой, то ихъ синусы и ихъ косекансы равны и имѣютъ одинаковые знаки, тогда какъ ихъ косинусы, ихъ тангенсы, ихъ котангенсы и ихъ секансы равны, но имѣютъ обратные знаки.*

Изъ двухъ предыдущихъ группъ уравненій выводимъ, обозначая чрезъ k положительное или отрицательное цѣлое число:

$$sin[(2k+1)\pi\pm x]=\mp sinx, \qquad cos[(2k+1)\pi\pm x]=-cosx,$$
$$tang(k\pi\pm x)=\pm tangx, \qquad cot(k\pi\pm x)=\pm cotx,$$
$$sec[(2k+1)\pi\pm x]=-secx, \qquad cosec[(2k+1)\pi\pm x]=\mp cosecx.$$

8. Изъ сказаннаго въ n° 6 слѣдуетъ, что синусъ и косинусъ заключаются между предѣлами -1 и $+1$; секансъ и косекансъ принимаютъ всѣ значенія отъ $+1$ до $+\infty$ и отъ -1 до $-\infty$; наконецъ, тангенсъ и котангенсъ принимаютъ всѣ значенія, заключающіяся между $-\infty$ и $+\infty$.

Весьма важно замѣтить, что каждая изъ тригонометрическихъ линій дуги x принимаетъ уже всѣ значенія, какія только она способна принимать при неопредѣленномъ измѣненіи x, когда x измѣняется въ предѣлахъ двухъ квадрантовъ. Такъ, когда x измѣняется отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, синусъ, тангенсъ, котангенсъ и секансъ принимаютъ всѣ значенія, какія только способны принимать эти тригонометрическія линіи; если x измѣняется отъ 0 до π, то косинусъ, тангенсъ, котангенсъ и секансъ принимаютъ также всѣ значенія, какія они только могутъ принимать. Наконецъ, если будемъ при-

нимать во вниманіе только ихъ абсолютныя величины, то всѣ шесть тригонометрическихъ линій принимаютъ всѣ значенія, когда дуга измѣняется отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, или отъ $\frac{\pi}{2}$ до π, или.....

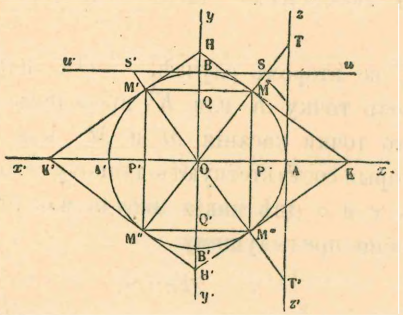
Часто требуется, когда дана дуга x, найти дугу, заключающуюся между 0 и $\frac{\pi}{2}$, которая, не принимая во вниманіе знаковъ, имѣла бы тѣ же тригонометрическія линіи, что и x. Достаточно отнять отъ x наибольшее положительное или отрицательное цѣлое число полуокружностей, которое онъ можетъ содержать, чтобы положительный или отрицательный остатокъ $\pm\alpha$ былъ по абсолютной величинѣ меньше $\frac{\pi}{2}$; дуга α, если не будемъ принимать во вниманіе знаковъ, будетъ имѣть тѣ же тригонометрическія линіи, что и x.

О дугахъ, соотвѣтствующихъ данной тригонометрической линіи.

9. Изъ предыдущихъ разсужденій слѣдуетъ, что каждому значенію дуги между $-\infty$ и $+\infty$ соотвѣтствуетъ одно опредѣленное значеніе для каждой изъ ея тригонометрическихъ линій, тогда какъ одному опредѣленному значенію какой нибудь изъ тригонометрическихъ линій соотвѣтствуетъ безчисленное множество значеній дуги. Весьма важно умѣть опредѣлять всѣ дуги, которыя соотвѣтствуютъ данной тригонометрической линіи, когда мы знаемъ одну изъ этихъ дугъ; мы покажемъ рѣшеніе этого вопроса. Пусть будетъ, какъ и прежде, A началомъ дугъ; $y'y$ — линіей, на которой откладываются синусы и косекансы; $x'x$—линіей, на которой откладываются косинусы и секансы; $z'z$ и $u'u$—линіями, на которыхъ соотвѣтственно откладываются тангенсы и котангенсы.

Синусы и косекансы.—Пусть $+OQ$ или $-OQ'$ будетъ данный синусъ (фиг. 4); проведемъ чрезъ точку Q или Q' линію параллельную OA; эта параллельная линія пересѣчетъ окружность въ двухъ точкахъ M и M' или M'' и M''' и очевидно, что всякая дуга, соотвѣтствующая данному синусу, будетъ кончаться въ одной изъ этихъ двухъ точекъ; обозначимъ чрезъ α какую нибудь изъ этихъ дугъ; я говорю, что дуги α и $\pi-\alpha$ будутъ кончаться соотвѣтственно въ M и M' или M'' и M'''; въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, напримѣръ, что α оканчивается въ M: чтобы описать

Фиг. 4.



дугу $\pi-\alpha$, сперва опишемъ отъ A до A' дугу ABA'; затѣмъ останется описать дугу $-\alpha$, что приведетъ въ M', такъ какъ, описывая $+\alpha$, начавъ съ A, остановимся въ M. Такимъ образомъ, всякая дуга x, которая соотвѣтствуетъ данному синусу, имѣетъ тотъ же конецъ, что и одна изъ дугъ α и $\pi-\alpha$; слѣдовательно (n° 3), обозначая чрезъ k любое цѣлое число—положительное, отрицательное, нуль, будемъ имѣть:

$$x=2k\pi+\alpha, \text{ или } x=2k\pi+\pi-\alpha=(2k+1)\pi-\alpha.$$

Пусть будетъ, во второмъ случаѣ, $+OH$ или $-OH'$ данный косекансъ; если чрезъ точку H или H' проведемъ къ окружности двѣ касательныя, то точки касанія M и M' или M'' и M''' будутъ концами дугъ, которыя соотвѣтствуютъ данному косекансу. Если мы обозначимъ чрезъ x и α двѣ какія нибудь изъ этихъ дугъ, то будемъ имѣть, подобно предыдущему:

$$x=2k\pi+\alpha \text{ или } x=(2k+1)\pi-\alpha.$$

Косинусы и секансы.—Пусть $+OP$ или $-OP'$ будетъ данный косинусъ; проведемъ чрезъ точку P или P' перпендикуляръ къ OA; этотъ перпендикуляръ пересѣчетъ окружность въ двухъ точкахъ M и M''' или M' и M'', и очевидно, что всякая дуга, которая соотвѣтствуетъ данному косинусу, будетъ оканчиваться въ одной изъ этихъ двухъ точекъ; обозначимъ чрезъ α какую нибудь изъ этихъ дугъ. Дуги α и $-\alpha$ будутъ оканчиваться въ M и M''' или въ M' и M''; слѣдовательно, всякая дуга x, которая соотвѣтствуетъ

данному косинусу, имѣетъ тотъ же конецъ, что и каждая изъ дугъ α и $-\alpha$; отсюда имѣемъ:

$$x=2k\pi\pm\alpha,$$

гдѣ k обозначаетъ любое цѣлое число—положительное, отрицательное, нуль

Пусть будетъ, во второмъ случаѣ, $+OK$ или $-OK'$ данный секансъ; если чрезъ точку K или K' проведемъ двѣ касательныя къ окружности, то точки касанія M и M''' или M' и M'' будутъ концами дугъ, которыя соотвѣтствуютъ данному секансу. Поэтому, если обозначимъ чрезъ x и α двѣ какія нибудь изъ этихъ дугъ, то будемъ имѣть, подобно предыдущему:

$$x=2k\pi\pm\alpha.$$

Тангенсы и котангенсы.—Пусть будетъ $+AT$ или $-AT'$ данный тангенсъ и $+BS$ или $-BS'$ данный котангенсъ; проведемъ прямую линію чрезъ центръ круга и чрезъ конецъ даннаго тангенса или котангенса; эта прямая пересѣчетъ окружность въ двухъ точкахъ M и M'' или M' и M''' и очевидно, что всякая дуга, которая соотвѣтствуетъ данному тангенсу или котангенсу, будетъ имѣть конецъ въ одной изъ этихъ точекъ; обозначимъ чрезъ α какую нибудь изъ этихъ дугъ. Дуги α и $\pi+\alpha$ будутъ, очевидно, оканчиваться въ точкахъ M и M'' или M' и M''', слѣдовательно, всякая дуга x, соотвѣтствующая данному тангенсу или котангенсу, имѣетъ тотъ же конецъ, что и одна изъ дугъ α и $\pi+\alpha$, почему имѣемъ:

$$x=2k\pi+\alpha, \text{ или } x=2k\pi+\pi+\alpha=(2k+1)\pi+\alpha,$$

или просто

$$x=k\pi+\alpha,$$

гдѣ k обозначаетъ любое цѣлое число—положительное, отрицательное, нуль.

Все предыдущее приводитъ насъ къ слѣдующимъ выводамъ:

Для того, чтобы двѣ дуги имѣли тотъ же синусъ или тотъ же косекансъ, необходимо и достаточно, или чтобы ихъ сумма была равна нечетному числу полуокружностей, или чтобы ихъ разность была равна четному числу полуокружностей.

Для того, чтобы двѣ дуги имѣли тотъ же косинусъ или тотъ же секансъ, необходимо и достаточно, чтобы ихъ сумма или ихъ разность была равна цѣлому числу полуокружностей.

Для того, чтобы двѣ дуги имѣли тотъ же тангенсъ или тотъ же котангенсъ, необходимо и достаточно, чтобы разность этихъ дугъ была равна цѣлому числу полуокружностей.

10. Если положимъ, что

$$y=\sin x, \text{ или } y=\operatorname{tang} x, \text{ или } y=\sec x, \text{ или....},$$

то обыкновенно пишутъ также

$$x=\operatorname{arcsin} y, \text{ или } x=\operatorname{arctang} y, \text{ или } x=\operatorname{arcsec} y, \text{ или....},$$

т. е. $x=$ *дугѣ, у которой синусъ есть* y, $x=$ *дугѣ, у которой тангенсъ есть* y....; но изъ предыдущаго мы видимъ, что эти выраженія *arcsiny*,.... не вполнѣ опредѣлены, такъ какъ они допускаютъ безчисленное множество значеній для каждаго значенія y. Четыре выраженія *arcsiny*, *arctangy*, *arccoty*, *arccosecy* будутъ вполнѣ опредѣленными, если мы положимъ, что ихъ значенія заключаются постоянно между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$; точно также выраженія *arccosy* и *arcsecy* будутъ вполнѣ опредѣлены, если мы положимъ, что значенія ихъ заключаются постоянно между 0 и π. При такомъ ограниченіи, шесть выраженій:

$$\operatorname{arc}\sin y,\ \operatorname{arctang} y,\ \operatorname{arcsec} y,\ \operatorname{arccos} y,\ \operatorname{arccot} y,\ \operatorname{arccosec} y$$

могутъ быть разсматриваемы, какъ функціи y; въ этомъ смыслѣ онѣ употребляются въ высшихъ частяхъ математики, при чемъ имъ дали названіе *обратныхъ круговыхъ функцій*. Въ противоположность, тригонометрическія линіи часто называются *прямыми круговыми функціями*.

Соотношенія между тригонометрическими линіями одной и той же дуги.

11. Между шестью тригонометрическими линіями одной и той же дуги существуетъ пять различныхъ отношеній, которыя мы постараемся теперь вывести.

Пусть x (фиг. 5) будетъ дуга положительная или отрицательная, которой конецъ M расположенъ въ первомъ квадрантѣ AB; будемъ имѣть:

$$OM=1,$$
$$sinx=MP, \quad tangx=AT, \quad secx=OK,$$
$$cosx=OP, \quad cotx=BS, \quad cosecx=OH.$$

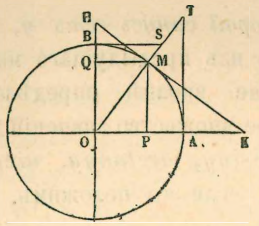
Положивъ это, изъ треугольника OMP имѣемъ:

$$MP^2+OP^2=OM^2;$$

изъ прямоугольныхъ треугольниковъ MOK и MOH имѣемъ также:

$$OK.OP=OM^2, \quad OH.OQ=OM^2;$$

Фиг. 5.



наконецъ, изъ подобныхъ треугольниковъ TOA и MOP, BOS и MOQ имѣемъ:

$$\frac{TA}{OA}=\frac{MP}{OP}, \quad \frac{SB}{OB}=\frac{MQ}{OQ}.$$

Эти пять равенствъ можно написать слѣдующимъ образомъ:

(1) $$sin^2x+cos^2x=1,$$

(2) $$secx.cosx=1,$$

(3) $$cosecx.sinx=1,$$

(4) $$tangx=\frac{sinx}{cosx},$$

(5) $$cotx=\frac{cosx}{sinx}.$$

Таковы соотношенія, которыя мы желали получить; изъ нихъ можно вывести много другихъ, которыя слѣдуетъ замѣтить. Такъ, изъ равенствъ (4) и (5) находимъ:

(6) $$cotx=\frac{1}{tangx};$$

равенства (2) и (3) также даютъ

(7) $$secx=\frac{1}{cosx},$$

(8) $$cosecx=\frac{1}{sinx},$$

что показываетъ, что $cotx$, $secx$ и $cosecx$ суть соотвѣтственно обратны $tangx$, $cosx$ и $sinx$.

Изъ равенствъ (4) и (5) выводимъ

$$1+tang^2x=1+\frac{sin^2x}{cos^2x}=\frac{1}{cos^2x},$$

$$1+cot^2x=1+\frac{cos^2x}{sin^2x}=\frac{1}{sin^2x},$$

или, вслѣдствіе соотношеній (7) и (8),

(9) $$sec^2x=1+tang^2x.$$

(10) $$cosec^2x=1+cot^2x.$$

Эти два послѣднія соотношенія могутъ быть доказаны и непосредственно, ибо прямоугольные треугольники OTA и OSB даютъ

$$OT^2=OK^2=OA^2+AT^2, \quad OS^2=OH^2=OB^2+BS^2,$$

соотношенія, которыя суть ни что иное, какъ равенства (9) и (10).

12. Чтобы вывести формулы (1), (2), (3), (4) и (5), мы предположили, что конецъ дуги x находится въ первомъ квадрантѣ; но легко видѣть, что эти формулы общи. Въ самомъ дѣлѣ, каково бы ни было положеніе конца M на окружности, существуетъ (n° 8) дуга между 0 и $\frac{\pi}{2}$, которая, если не принимать во вниманіе знаковъ, имѣетъ тѣ же тригонометрическія линіи, что и x; откуда слѣдуетъ, что если разсматривать только абсолютныя величины тригонометрическихъ линій, то отношенія (1), (2), (3), (4) и (5) всегда имѣютъ мѣсто. Отношеніе (1), которое содержитъ только квадраты $sinx$ и $cosx$, будетъ справедливо для всѣхъ случаевъ, почему достаточно показать, что обѣ части каждаго изъ отношеній (2), (3), (4) и (5) имѣютъ всегда одинаковые знаки. Мы видѣли:

1° Что $cosx$ и $secx$ оба положительны, если конецъ дуги x расположенъ въ первомъ или въ четвертомъ квадрантѣ, и что они отрицательны въ двухъ другихъ случаяхъ;

2° Что $sinx$ и $cosecx$ положительны, если конецъ дуги x расположенъ въ первомъ или во второмъ квадрантѣ, и что они отрицательны въ двухъ другихъ случаяхъ;

3° Что тангенсъ и котангенсъ x положительны, если конецъ этой дуги находится въ первомъ или въ третьемъ квадрантѣ, но въ

этомъ случаѣ $sinx$ и $cosx$ оба положительны или оба отрицательны; тѣ же тригонометрическія линіи отрицательны, если конецъ дуги x находится во второмъ или въ четвертомъ квадрантѣ, но въ этомъ случаѣ $sinx$ и $cosx$ имѣютъ обратные знаки.

Отсюда, а также изъ правила умноженія положительныхъ и отрицательныхъ количествъ слѣдуетъ, что обѣ части каждаго изъ отношеній (2), (3), (4), (5) всегда имѣютъ одинаковые знаки. Такимъ образомъ, эти формулы справедливы для всѣхъ значеній x.

13. Изъ равенствъ (1), (2), (3), (4), (5) можно опредѣлить какія угодно пять изъ шести тригонометрическихъ линій *въ функціи* шестой; имѣемъ, напримѣръ,

$$cosx=\pm\sqrt{1-sin^2x}, \qquad tangx=\frac{sinx}{\pm\sqrt{1-sin^2x}},$$

$$cotx=\frac{\pm\sqrt{1-sin^2x}}{sinx}, \qquad secx=\frac{1}{\pm\sqrt{1-sin^2x}},$$

$$cosecx=\frac{1}{sinx}.$$

Замѣтимъ, однако, что если мы знаемъ одну изъ тригонометрическихъ линій дуги x, то не всѣ другія линіи вполнѣ опредѣлены; такъ, когда данъ $sinx$, то $cosecx$ вполнѣ опредѣляется, что же касается остальныхъ четырехъ линій, то будутъ извѣстны только ихъ абсолютныя значенія. Это потому, что между дугами, соотвѣтствующими данному синусу, есть такія, которыхъ косинусъ, тангенсъ, котангенсъ и секансъ положительны, и такія, для которыхъ тѣ же самыя линіи отрицательны.

Часто требуется по данному $tangx$ опредѣлить $sinx$ и $cosx$; положимъ, что данное значеніе $tangx$ имѣетъ видъ дроби $\frac{m}{n}$; будемъ имѣть:

$$sin^2x+cos^2x=1, \qquad \frac{sinx}{cosx}=\frac{m}{n},$$

откуда

$$sinx=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}, \qquad cosx=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}};$$

въ этихъ двухъ формулахъ радикалъ $\sqrt{m^2+n^2}$ должно взять съ однимъ и тѣмъ же знакомъ; но этотъ знакъ остается неопредѣленнымъ.

Такъ какъ дуга $\frac{\pi}{4}$ равна своему дополненію, то $cos\frac{\pi}{4}$ равенъ $sin\frac{\pi}{4}$; слѣдовательно,

$$tang\frac{\pi}{4}=1;$$

затѣмъ, на основаніи предыдущаго, находимъ:

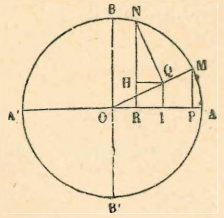
$$sin\frac{\pi}{4}=cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Формулы, относящіяся къ сложенію дугъ.

14. Синусъ и косинусъ. — Опредѣлимъ теперь синусъ и косинусъ суммы двухъ дугъ, зная синусы и косинусы этихъ дугъ.

Обозначимъ чрезъ a и b двѣ положительныя дуги, которыхъ сумма не превышаетъ $\frac{\pi}{2}$. Пусть (фиг. 6) A будетъ началомъ дугъ;

Фиг 6.



отложимъ $AM=a$ и $MN=b$; мы можемъ разсматривать точку M какъ начало дуги b, а точку N, какъ ея конецъ; тогда будемъ имѣть:

$$a+b=AN;$$

опустивъ перпендикуляръ NQ на радіусъ OM, перпендикуляры NR, QI, MP на OA и проведя линію QH параллельно OA, найдемъ:

$$sina=MP, \quad cosa=OP,$$
$$sinb=NQ, \quad cosb=OQ,$$
$$sin(a+b)=NR=QI+NH,$$
$$cos(a+b)=OR=OI-QH.$$

Изъ подобія треугольниковъ MPO и QIO слѣдуетъ:

$$\frac{QI}{MP}=\frac{OI}{OP}=\frac{OQ}{OM},$$

откуда получаемъ:

$$QI=\frac{MP\,.\,OQ}{OM}=\sin a\sin b,\quad OI=\frac{OP\,.\,OQ}{OM}=\cos a\cos b.$$

Треугольники MPO и NQH также подобны, такъ какъ ихъ стороны взаимно перпендикулярны, почему

$$\frac{NH}{OP}=\frac{QH}{MP}=\frac{NQ}{OM},$$

откуда

$$NH=\frac{OP\,.\,NQ}{OM}=\cos a\sin b,\quad QH=\frac{MP\,.\,NQ}{OM}=\sin a\sin b.$$

Послѣ всего этого имѣемъ:

(1) $$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b,$$

(2) $$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b.$$

15. Эти формулы (1) и (2) были доказаны нами при томъ предположеніи, что a и b положительныя дуги и что сумма ихъ не превышаетъ $\frac{\pi}{2}$. Но мы докажемъ, что эти формулы приложимы для какихъ бы то ни было двухъ дугъ a и b.

1° *Формулы* (1) *и* (2) *справедливы для всѣхъ значеній* a *и* b, *заключающихся между* 0 *и* $\frac{\pi}{2}$.

Это было уже доказано для того случая, когда $a+b<\frac{\pi}{2}$ или $=\frac{\pi}{2}$; предположимъ теперь, что $a+b>\frac{\pi}{2}$. Пусть a' и b' будутъ дополнительными дугами a и b, тогда будемъ имѣть: $a'+b'<\frac{\pi}{2}$ и, слѣдовательно,

$$\sin(a'+b')=\sin a'\cos b'+\cos a'\sin b',$$
$$\cos(a'+b')=\cos a'\cos b'-\sin a'\sin b'.$$

Такъ какъ синусы двухъ пополнительныхъ дугъ равны, а косинусы ихъ равны, но съ обратными знаками, то, замѣнивъ

a', b' и $a'+b'$ ихъ равными имъ значеніями $\frac{\pi}{2}-a$, $\frac{\pi}{2}-b$ и $\pi-(a+b)$, получимъ именно формулы (1) и (2).

2° *Если формулы* (1) *и* (2) *справедливы для двухъ дугъ* a *и* b, *то онѣ также справедливы и тогда, когда къ одной изъ этихъ дугъ придадимъ* $\frac{\pi}{2}$.

Положивъ, что дуги a и b удовлетворяютъ формуламъ (1) и (2), примемъ $a'=a+\frac{\pi}{2}$ и замѣнимъ a чрезъ $a'-\frac{\pi}{2}$; получимъ

$$\sin\left(a'+b-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(a'-\frac{\pi}{2}\right)\cos b+\cos\left(a'-\frac{\pi}{2}\right)\sin b,$$
$$\cos\left(a'+b-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(a'-\frac{\pi}{2}\right)\cos b-\sin\left(a'-\frac{\pi}{2}\right)\sin b;$$

но, при всякомъ x, будемъ имѣть:

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x,$$
$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x;$$

слѣдовательно, предыдущія формулы можемъ написать въ такомъ видѣ:

$$\cos(a'+b)=\cos a'\cos b-\sin a'\sin b,$$
$$\sin(a'+b)=\sin a'\cos b+\cos a'\sin b,$$

и мы видимъ, что это суть формулы (1) и (2), въ которыхъ вмѣсто a подставлено a' или $a+\frac{\pi}{2}$.

3° *Формулы* (1) *и* (2) *справедливы для всѣхъ положительныхъ величинъ* a *и* b.

Предположимъ, что положительныя дуги a и b заключаютъ въ себѣ соотвѣтственно первая m, а вторая n квадрантовъ, и положимъ, что

$$a=m\frac{\pi}{2}+a',\quad b=n\frac{\pi}{2}+b',$$

при чемъ a' и b' меньше одного квадранта; будемъ имѣть:

$$\sin(a'+b')=\sin a'\cos b'+\cos a'\sin b',$$
$$\cos(a'+b')=\cos b'\cos a'-\sin a'\sin b'.$$

Но, по предыдущему, эти формулы будутъ справедливы и тогда

когда будемъ послѣдовательно прибавлять m разъ $\frac{\pi}{2}$ къ a' и n разъ $\frac{\pi}{2}$ къ b', слѣдовательно, формулы (1) и (2) приложимы къ двумъ какимъ бы то ни было положительнымъ дугамъ a и b.

4° *Формулы* (1) *и* (2) *справедливы для всевозможныхъ значеній* a *и* b.

Это предложеніе было доказано для случаевъ, когда a и b положительны; предположимъ теперь, что по крайней мѣрѣ одна изъ этихъ дугъ отрицательна, и обозначимъ чрезъ k цѣлое число настолько большóе, чтобы суммы $2k\pi+a=a'$, $2k\pi+b=b'$ были положительны; будемъ имѣть:

$$\sin(a'+b')=\sin a'\cos b'+\cos a'\sin b',$$
$$\cos(a'+b')=\cos a'\cos b'-\sin a'\sin b';$$

замѣняя a' чрезъ $2k\pi+a$ и b' чрезъ $2k\pi+b$ и принимая во вниманіе, что при всякомъ значеніи x, имѣемъ

$$\sin(2k\pi+x)=\sin x,\quad \cos(2k\pi+x)=\cos x,$$

опять получаемъ формулы (1) и (2).

Такимъ образомъ общность формулъ (1) и (2) вполнѣ установлена; слѣдуетъ замѣтить, что каждая изъ этихъ формулъ можетъ быть выведена изъ другой, если замѣнимъ въ послѣдней a чрезъ $a+\frac{\pi}{2}$, или b чрезъ $b+\frac{\pi}{2}$.

Если въ формулахъ (1) и (2) замѣнимъ b чрезъ $-b$, то получимъ:

(3) $$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b,$$

(4) $$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b.$$

16. На основаніи предыдущаго можно легко найти синусъ и косинусъ суммы какого угодно числа дугъ, когда извѣстны синусы и косинусы этихъ дугъ. Пусть, напримѣръ, a, b, c будутъ три какія нибудь дуги; тогда будемъ имѣть:

$$\sin(a+b+c)=\sin(a+b)\cos c+\cos(a+b)\sin c,$$
$$\cos(a+b+c)=\cos(a+b)\cos c-\sin(a+b)\sin c;$$

затѣмъ, замѣняя $\sin(a+b)$ и $\cos(a+b)$ выведенными для нихъ выраженіями, находимъ:

$$\sin(a+b+c)=\sin a\cos b\cos c+\sin b\cos a\cos c+$$
$$+\sin c\cos a\cos b-\sin a\sin b\sin c,$$
$$\cos(a+b+c)=\cos a\cos b\cos c-\cos a\sin b\sin c-$$
$$-\cos b\sin a\sin c-\cos c\sin a\sin b.$$

Зная такимъ образомъ формулы, дающія синусъ и косинусъ суммы трехъ дугъ, можно получить формулы для синуса и косинуса суммы четырехъ дугъ, и т. д.

17. Тангенсы и котангенсы.—Постараемся теперь найти тангенсъ и котангенсъ суммы двухъ дугъ, зная тангенсы и котангенсы этихъ дугъ.

Пусть будутъ a и b двѣ какія нибудь дуги, положительныя или отрицательныя; тогда будемъ имѣть:

$$\operatorname{tang}(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b},$$

и, раздѣливъ числителя и знаменателя этой дроби на $\cos a\cos b$, получимъ:

(5) $$\operatorname{tang}(a+b)=\frac{\operatorname{tang}a+\operatorname{tang}b}{1-\operatorname{tang}a\operatorname{tang}b}.$$

Если въ этой формулѣ замѣнимъ b чрезъ $-b$, то получимъ:

(6) $$\operatorname{tang}(a-b)=\frac{\operatorname{tang}a-\operatorname{tang}b}{1+\operatorname{tang}a\operatorname{tang}b}.$$

Чтобы получить $\operatorname{cot}(a+b)$ въ функціи $\operatorname{cot}a$ и $\operatorname{cot}b$, достаточно припомнить, что котангенсъ дуги есть количество, обратное тангенсу той же дуги. Замѣтивъ это, мы можемъ написать уравненія (5) и (6) такъ:

$$\operatorname{cot}(a+b)=\frac{\operatorname{cot}a\operatorname{cot}b-1}{\operatorname{cot}a+\operatorname{cot}b},\quad \operatorname{cot}(a-b)=\frac{1+\operatorname{cot}a\operatorname{cot}b}{\operatorname{cot}b-\operatorname{cot}a}.$$

На основаніи предыдущаго, можно легко выразить тангенсъ суммы какого угодно числа дугъ въ функціи тангенсовъ этихъ дугъ. Пусть, напримѣръ, будутъ a, b, c три какія нибудь дуги; тогда

$$\operatorname{tang}(a+b+c)=\frac{\operatorname{tang}(a+b)+\operatorname{tang}c}{1-\operatorname{tang}(a+b)\operatorname{tang}c},$$

и замѣняя $\operatorname{tang}(a+b)$ его выраженіемъ $\frac{\operatorname{tang}a+\operatorname{tang}b}{1-\operatorname{tang}a\operatorname{tang}b}$, получимъ:

$$\operatorname{tang}(a+b+c)=\frac{\operatorname{tang}a+\operatorname{tang}b+\operatorname{tang}c-\operatorname{tang}a\operatorname{tang}b\operatorname{tang}c}{1-\operatorname{tang}a\operatorname{tang}b-\operatorname{tang}a\operatorname{tang}c-\operatorname{tang}b\operatorname{tang}c}.$$

Зная, такимъ образомъ, формулу, которая даетъ тангенсъ суммы трехъ дугъ, мы можемъ получить формулу, дающую сумму четырехъ дугъ, и т. д..

Важнѣйшія формулы, выводимыя изъ формулъ, относящихся къ сложенію дугъ.

18. Изъ формулъ:

$$\begin{aligned} \sin(a+b)&=\sin a\cos b+\cos a\sin b,\\ \cos(a+b)&=\cos a\cos b-\sin a\sin b,\\ \sin(a-b)&=\sin a\cos b-\cos a\sin b,\\ \cos(a-b)&=\cos a\cos b+\sin a\sin b, \end{aligned}$$

выводимъ

$$(1)\qquad \begin{cases} \sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a\cos b,\\ \sin(a+b)-\sin(a-b)=2\cos a\sin b,\\ \cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b,\\ \cos(a-b)-\cos(a+b)=2\sin a\sin b. \end{cases}$$

Положимъ теперь

$$a+b=p,\quad a-b=q;$$

тогда будемъ имѣть

$$a=\tfrac{1}{2}(p+q),\quad b=\tfrac{1}{2}(p-q),$$

почему предыдущія формулы примутъ видъ:

$$(2)\qquad \begin{cases} \sin p+\sin q=2\sin\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q),\\ \sin p-\sin q=2\sin\frac{1}{2}(p-q)\cos\frac{1}{2}(p+q),\\ \cos p+\cos q=2\cos\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q),\\ \cos q-\cos p=2\sin\frac{1}{2}(p+q)\sin\frac{1}{2}(p-q). \end{cases}$$

Эти послѣднія формулы очень употребительны; онѣ служатъ для выраженія суммы или разности двухъ синусовъ или двухъ косинусовъ посредствомъ произведенія синусовъ или косинусовъ.

Можно также выразить посредствомъ произведенія сумму или разность синуса и косинуса; въ самомъ дѣлѣ имѣемъ:

$$\cos p\pm\sin q=\sin\left(\frac{\pi}{2}-p\right)\pm\sin q,$$

и, пользуясь формулами (2),

$$(3)\qquad \begin{cases} \cos p+\sin q=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{p+q}{2}\right),\\ \cos p-\sin q=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{p-q}{2}\right). \end{cases}$$

Раздѣливъ послѣдовательно одна на другую формулы (2), получимъ слѣдующія формулы, которыя важно замѣтить:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sin p+\sin q}{\sin p-\sin q}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)}{\sin\frac{1}{2}(p-q)\cos\frac{1}{2}(p+q)}=\dfrac{\tan g\frac{1}{2}(p+q)}{\tan g\frac{1}{2}(p-q)},\\ \dfrac{\sin p+\sin q}{\cos p+\cos q}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(p+q)}{\cos\frac{1}{2}(p+q)}=\tan g\,\frac{1}{2}(p+q),\\ \dfrac{\sin p+\sin q}{\cos q-\cos p}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(p-q)}{\sin\frac{1}{2}(p-q)}=\cot\frac{1}{2}(p-q),\\ \dfrac{\sin p-\sin q}{\cos p+\cos q}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(p-q)}{\cos\frac{1}{2}(p-q)}=\tan g\,\frac{1}{2}(p-q),\\ \dfrac{\sin p-\sin q}{\cos q-\cos p}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(p+q)}{\sin\frac{1}{2}(p+q)}=\cot\frac{1}{2}(p+q),\\ \dfrac{\cos p+\cos q}{\cos q-\cos p}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)}{\sin\frac{1}{2}(p+q)\sin\frac{1}{2}(p-q)}\\ \qquad\qquad=\cot\frac{1}{2}(p+q)\cot\frac{1}{2}(p-q). \end{cases}$$

19. Можно также преобразовать сумму или разность двухъ тангенсовъ въ произведеніе тригонометрическихъ линій. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$\tan g\,a\pm\tan g\,b=\frac{\sin a}{\cos a}\pm\frac{\sin b}{\cos b}=\frac{\sin a\cos b\pm\cos a\sin b}{\cos a\cos b},$$

или

$$(5)\qquad \tan g\,a\pm\tan g\,b=\frac{\sin(a\pm b)}{\cos a\cos b};$$

точно также

$$(6)\qquad \cot a\pm\cot b=\frac{\sin(b\pm a)}{\sin a\sin b},$$

$$(7)\qquad \cot a\pm\tan g\,b=\frac{\cos(a\mp b)}{\sin a\cos b}.$$

Вотъ еще формула, которую слѣдуетъ замѣтить. Перемножимъ между собою два равенства:

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b,$$
$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b;$$

получимъ

$$\sin(a+b)\sin(a-b)=\sin^2a\cos^2b+\cos^2a\sin^2b$$
$$=(1-\sin^2b)\sin^2a-(1-\sin^2a)\sin^2b$$
$$=(1-\cos^2a)\cos^2b-(1-\cos^2b)\cos^2a,$$

или

$$(8)\quad \begin{cases} \sin(a+b)\sin(a-b)=\sin^2a-\sin^2b \\ \qquad\qquad\qquad\quad =\cos^2b-\cos^2a. \end{cases}$$

20. Сумма косинусовъ или синусовъ ряда дугъ, составляющихъ ариѳметическую прогрессію.—Пусть имѣемъ n дугъ:

$$a,\ a+h,\ a+2h,\ldots.,\ a+(n-1)h.$$

Обозначимъ чрезъ i какое нибудь цѣлое число; тогда будемъ имѣть (n° 18):

$$2\sin\frac{h}{2}\cos(a+ih)=\sin\left(a+\frac{2i+1}{2}h\right)-\sin\left(a+\frac{2i-1}{2}h\right).$$

Давая послѣдовательно i значенія 0, 1, 2,.....$(n-1)$, получимъ:

$$2\sin\frac{h}{2}\cos a=\sin\left(a+\frac{h}{2}\right)-\sin\left(a-\frac{h}{2}\right),$$
$$2\sin\frac{h}{2}\cos(a+h)=\sin\left(a+\frac{3h}{2}\right)-\sin\left(a+\frac{h}{2}\right),$$
$$2\sin\frac{h}{2}\cos(a+2h)=\sin\left(a+\frac{5h}{2}\right)-\sin\left(a+\frac{3h}{2}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$2\sin\frac{h}{2}\cos[a+(n-1)h]=\sin\left(a+\frac{2n-1}{2}h\right)-\sin\left(a+\frac{2n-3}{2}h\right).$$

Складывая эти равенства почленно и сдѣлавъ приведеніе, получимъ:

$$2\sin\frac{h}{2}\{\cos a+\cos(a+h)+\cos(a+2h)+\ldots+\cos[a+(n-1)h]\}=$$
$$=\sin\left(a+\frac{2n-1}{2}h\right)-\sin\left(a-\frac{h}{2}\right),$$

откуда

$$\cos a+\cos(a+h)+\ldots+\cos[a+(n-1)h]$$
$$=\frac{\sin\left(a+\frac{2n-1}{2}h\right)-\sin\left(a-\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}};$$

наконецъ, преобразовавъ числителя во второй части равенства по формуламъ n° 18, имѣемъ

$$\cos a+\cos(a+h)+\cos(a+2h)+\ldots+\cos[a+(n-1)h]=$$
$$=\frac{\sin\frac{nh}{2}\cos\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)}{\sin\frac{h}{2}}.$$

Если въ этой формулѣ перемѣнимъ a на $\frac{\pi}{2}-a$ и h на $-h$, то получимъ:

$$\sin a+\sin(a+h)+\sin(a+2h)+\ldots+\sin[a+(n-1)h]=$$
$$=\frac{\sin\frac{nh}{2}\sin\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)}{\sin\frac{h}{2}}.$$

Двѣ предыдущія формулы представляютъ очень простыя выраженія какъ для суммы косинусовъ, такъ и для суммы синусовъ n дугъ, составляющихъ ариѳметическую прогрессію.

Умноженіе дугъ.

21. Выраженіе $\sin 2a$ и $\cos 2a$ въ функціи $\sin a$ или $\cos a$.—Если въ формулахъ

$$(1)\quad \begin{cases} \sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b, \\ \cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b, \end{cases}$$

положимъ $b=a$, то получимъ

$$(2)\quad \begin{cases} \sin 2a=2\sin a\cos a, \\ \cos 2a=\cos^2a-\sin^2a. \end{cases}$$

Эти формулы (2) выражаютъ $\sin 2a$ и $\cos 2a$ въ функціи $\sin a$ и $\cos a$. Если мы пожелаемъ ихъ выразить въ функціи только $\sin a$ или $\cos a$, то для этого должно замѣнить $\cos a$ чрезъ $\sqrt{1-\sin^2a}$ или $\sin a$ чрезъ $\sqrt{1-\cos^2a}$; такимъ образомъ получимъ:

$$(3)\quad \begin{cases} \sin 2a=\pm 2\sin a\sqrt{1-\sin^2a}=\pm 2\cos a\sqrt{1-\cos^2a}, \\ \cos 2a=1-2\sin^2a=2\cos^2a-1. \end{cases}$$

Важно замѣтить, что $\cos 2a$ выражается раціонально въ функціи $\cos a$ или $\sin a$, тогда какъ $\sin 2a$ будетъ ирраціональной функціей $\sin a$ или $\cos a$. Отсюда слѣдуетъ, что если знаемъ $\sin a$ или $\cos a$, то $\cos 2a$ опредѣляется вполнѣ, тогда какъ для $\sin 2a$ опредѣляется только его абсолютное значеніе. Объяснимъ, отчего это происходитъ.

Предположимъ сначала, что извѣстно значеніе $\sin a$ и положимъ

$$\sin a = b;$$

здѣсь дуга a неопредѣленна и всѣ ея значенія даны (n° 9) формулами

$$a = 2k\pi + \alpha, \quad a = (2k+1)\pi - \alpha,$$

гдѣ α обозначетъ нѣкоторую опредѣленную дугу, имѣющую синусомъ b. Послѣ этого значенія $\sin 2a$ опредѣлятся изъ формулъ

$$\sin 2a = \sin(4k\pi + 2\alpha) = \sin 2\alpha,$$
$$\sin 2a = \sin(4k\pi + 2\pi - 2\alpha) = -\sin 2\alpha;$$

точно также получимъ значенія $\cos 2a$:

$$\cos 2a = \cos(4k\pi + 2\alpha) = \cos 2\alpha,$$
$$\cos 2a = \cos(4k\pi + 2\pi - 2\alpha) = \cos 2\alpha.$$

Отсюда видно, что $\sin 2a$ имѣетъ два различныхъ значенія $\pm \sin 2\alpha$, тогда какъ $\cos 2a$ имѣетъ только одно значеніе $\cos 2\alpha$.

Тоже получимъ, если постараемся опредѣлить $\sin 2a$ и $\cos 2a$ по $\cos a$. Положимъ, что

$$\cos a = b,$$

и обозначимъ чрезъ α опредѣленную дугу, имѣющую косинусомъ b; всѣ значенія a опредѣляются формулой

$$a = 2k\pi \pm \alpha,$$

почему значенія $\sin 2a$ и $\cos 2a$ мы получимъ изъ слѣдующихъ формулъ:

$$\sin 2a = \sin(4k\pi \pm 2\alpha) = \pm \sin 2\alpha,$$
$$\cos 2a = \cos(4k\pi \pm 2\alpha) = \cos 2\alpha;$$

такимъ образомъ $\sin 2a$ имѣетъ два значенія равныя, но съ обратными знаками, тогда какъ $\cos 2a$ имѣетъ только одно значеніе.

22. Выраженіе $\sin 3a$ и $\cos 3a$ въ функціи $\sin a$ или $\cos a$.—Если въ формулахъ (1), положимъ $b = 2a$, то найдемъ

$$\sin 3a = \sin a \cos 2a + \cos a \sin 2a,$$
$$\cos 3a = \cos a \cos 2a - \sin a \sin 2a;$$

замѣняя $\sin 2a$ и $\cos 2a$ ихъ величинами, полученными изъ уравненій (2), найдемъ:

$$(4) \quad \begin{cases} \sin 3a = 3\sin a \cos^2 a - \sin^3 a, \\ \cos 3a = \cos^3 a - 3\sin^2 a \cos a, \end{cases}$$

формулы, которыя выражаютъ $\sin 3a$ и $\cos 3a$ въ функціи $\sin a$ и $\cos a$. Замѣняя въ первой изъ нихъ $\cos^2 a$ чрезъ $1 - \sin^2 a$ и во второй $\sin^2 a$ чрезъ $1 - \cos^2 a$, получимъ:

$$(5) \quad \begin{cases} \sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a, \\ \cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a. \end{cases}$$

Мы видимъ, что $\sin 3a$ и $\cos 3a$ выражаются раціонально, первый въ функціи $\sin a$, а второй въ функціи $\cos a$; напротивъ того, $\sin 3a$ является ирраціональной функціей $\cos a$ и $\cos 3a$ ирраціональной функціей $\sin a$. Отсюда слѣдуетъ, что, если данъ $\sin a$, то $\sin 3a$ вполнѣ опредѣляется, между тѣмъ какъ для $\cos 3a$ опредѣляется только его абсолютное значеніе; наоборотъ, если данъ $\cos a$, то $\cos 3a$ опредѣляется вполнѣ, а $\sin 3a$—нѣтъ. Можно, разсуждая такъ же, какъ и въ n° 21, показать, что такъ и должно быть, но мы этихъ разсужденій не воспроизводимъ.

23. Если мы знаемъ $\sin(m-1)a$ и $\cos(m-1)a$ въ функціи $\sin a$ и $\cos a$, то мы можемъ получить выраженія $\sin ma$ и $\cos ma$, положивъ $b = (m-1)a$ въ уравненіяхъ (1), которыя тогда примутъ видъ

$$\sin ma = \sin a \cos(m-1)a + \cos a \sin(m-1)a,$$
$$\cos ma = \cos a \cos(m-1)a - \sin a \sin(m-1)a,$$

и замѣнивъ $\sin(m-1)a$ и $\cos(m-1)a$ извѣстными ихъ значеніями. Отсюда ясно, какимъ образомъ можно вычислить постепенно, слѣдуя этому пріему, $\sin 4a$ и $\cos 4a$, $\sin 5a$ и $\cos 5a$,...., въ функціи $\sin a$ и $\cos a$. Но мы не будемъ дальше продолжать вычисленій; впрочемъ впослѣдствіи мы дадимъ общій способъ полученія непосредственно выраженій $\sin ma$ и $\cos ma$, какое бы ни было цѣлое число m.

24. Выраженія $tang\,2a$ и $tang\,3a$ въ функціи $tang\,a$. — Если въ формулѣ

$$tang(a+b)=\frac{tang\,a+tang\,b}{1-tang\,a\,tang\,b} \tag{6}$$

положимъ $b=a$, то получимъ

$$tang\,2a=\frac{2\,tang\,a}{1-tang^2 a}, \tag{7}$$

формулу, выражающую $tang\,2a$ въ функціи $tang\,a$.

Если въ формулѣ (6) положимъ $b=2a$, то получимъ:

$$tang\,3a=\frac{tang\,a+tang\,2a}{1-tang\,a\,tang\,2a},$$

и, замѣняя $tang\,2a$ его выраженіемъ изъ формулы (7),

$$tang\,3a=\frac{3\,tang\,a-tang^3 a}{1-3\,tang^2 a}.$$

Вообще, если извѣстно выраженіе $tang(m-1)a$ въ функціи $tang\,a$, то $tang\,ma$ опредѣлится формулою:

$$tang\,ma=\frac{tang\,a+tang(m-1)a}{1-tang\,a\,tang(m-1)a}.$$

Такимъ образомъ мы можемъ послѣдовательно вычислить $tang\,4a$, $tang\,5a$, ..., которые всѣ будутъ выражены раціонально чрезъ $tang\,a$. Дальше мы дадимъ общеее выраженіе $tang\,ma$ въ функціи $tang\,a$.

Выраженіе $cot\,ma$ въ функціи $cot\,a$ выводится непосредственно изъ выраженія $tang\,ma$ въ функціи $tang\,a$; напримѣръ, замѣняя въ формулѣ (7) $tang\,a$ и $tang\,2a$ чрезъ $\frac{1}{cot\,a}$ и $\frac{1}{cot\,2a}$, получимъ:

$$cot\,2a=\frac{cot^2 a-1}{2cot\,a}.$$

Дѣленіе дугъ.

25. Выраженія $sin\frac{1}{2}a$ и $cos\frac{1}{2}a$ въ функціяхъ $cos\,a$.—Имѣемъ (n° 21):

$$cos^2\tfrac{1}{2}a-sin^2\tfrac{1}{2}a=cos\,a,$$
$$cos^2\tfrac{1}{2}a+sin^2\tfrac{1}{2}a=1,$$

изъ этихъ равенствъ получаемъ:

$$cos^2\frac{1}{2}a=\frac{1+cos\,a}{2},\quad sin^2\frac{1}{2}a=\frac{1-cos\,a}{2},$$

откуда

$$cos\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{\frac{1+cos\,a}{2}},\quad sin\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{\frac{1-cos\,a}{2}}. \tag{1}$$

Мы видимъ, что абсолютныя значенія $cos\frac{1}{2}a$ и $sin\frac{1}{2}a$ вполнѣ опредѣляются, а знаки остаются неопредѣленными. Это можно объяснить тѣми же разсужденіями, что и въ n° 21. Пусть b будетъ данное значеніе $cos\,a$, и α опредѣленная дуга, имѣющая косинусомъ b; значенія дугъ a, для которыхъ $cos\,a=b$, выражаются формулою:

$$a=2k\pi\pm\alpha;$$

слѣдовательно, значенія $cos\frac{1}{2}a$ и $sin\frac{1}{2}a$ опредѣлятся изъ формулъ:

$$cos\tfrac{1}{2}a=cos(k\pi\pm\tfrac{1}{2}\alpha),\quad sin\tfrac{1}{2}a=sin(k\pi\pm\tfrac{1}{2}\alpha).$$

Если k число четное, то эти формулы примутъ видъ:

$$cos\tfrac{1}{2}a=cos\tfrac{1}{2}\alpha,\quad sin\tfrac{1}{2}a=\pm sin\tfrac{1}{2}\alpha;$$

а если k нечетное, то онѣ будутъ

$$cos\tfrac{1}{2}a=-cos\tfrac{1}{2}\alpha,\quad sin\tfrac{1}{2}a=\pm sin\tfrac{1}{2}\alpha;$$

это показываетъ, что $cos\frac{1}{2}a$ имѣетъ двойное значеніе $\pm cos\frac{1}{2}\alpha$, а $sin\frac{1}{2}a$ двойное значеніе $\pm sin\frac{1}{2}\alpha$.

Если дуга a дана, то знаки $sin\frac{1}{2}a$ и $cos\frac{1}{2}a$ будутъ извѣстны, и ихъ значенія могутъ быть вычислены при помощи формулъ (1). Если желаемъ, напримѣръ, найти синусъ и косинусъ дуги $\frac{\pi}{8}$, зная, что косинусъ $\frac{\pi}{4}$ есть $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (n° 13), то изъ формулъ (1) получимъ

$$cos\,\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\quad sin\,\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

26. Выраженія $sin\frac{1}{2}a$ и $cos\frac{1}{2}a$ въ функціяхъ $sin\,a$.—Если въ формулахъ (1) замѣнимъ $cos\,a$ чрезъ $\pm\sqrt{1-sin^2 a}$, то получимъ

$$cos\tfrac{1}{2}a=\pm\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{1-sin^2 a}}{2}},$$

$$sin\tfrac{1}{2}a=\pm\sqrt{\frac{1\mp\sqrt{1-sin^2 a}}{2}};$$

но можно получить результаты болѣе простые. Въ самомъ дѣлѣ, изъ двухъ формулъ

$$2\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}a=\sin a,\quad \cos^2\tfrac{1}{2}a+\sin^2\tfrac{1}{2}a=1,$$

складывая и вычитая ихъ, получимъ

$$(\cos\tfrac{1}{2}a+\sin\tfrac{1}{2}a)^2=1+\sin a,$$
$$(\cos\tfrac{1}{2}a-\sin\tfrac{1}{2}a)^2=1-\sin a,$$

откуда

$$\cos\tfrac{1}{2}a+\sin\tfrac{1}{2}a=\pm\sqrt{1+\sin a},$$
$$\cos\tfrac{1}{2}a-\sin\tfrac{1}{2}a=\pm\sqrt{1-\sin a},$$

и, слѣдовательно,

$$(2)\quad \begin{cases} \cos\tfrac{1}{2}a=\pm\tfrac{1}{2}(\sqrt{1+\sin a}\pm\sqrt{1-\sin a}), \\ \sin\tfrac{1}{2}a=\pm\tfrac{1}{2}(\sqrt{1+\sin a}\mp\sqrt{1-\sin a}). \end{cases}$$

Въ этихъ двухъ формулахъ верхніе или нижніе знаки внѣ скобокъ или въ скобкахъ соотвѣтственны; но въ каждой изъ нихъ знакъ внѣ скобокъ не зависитъ отъ знака въ скобкахъ. Такимъ образомъ мы находимъ четыре значенія для $\cos\frac{1}{2}a$ и четыре для $\sin\frac{1}{2}a$; замѣчательно, что значенія для $\cos\frac{1}{2}a$ будутъ именно тѣ же, что и значенія для $\sin\frac{1}{2}a$. Чтобы объяснить это, положимъ, что b есть данное значеніе $\sin a$ и α опредѣленная дуга, имѣющая синусомъ b. Значенія дуги a получимъ изъ формулъ

$$a=2k\pi+\alpha,\quad a=(2k+1)\pi-\alpha,$$

слѣдовательно, значенія $\cos\frac{1}{2}a$ и $\sin\frac{1}{2}a$ будутъ

$$\cos\frac{1}{2}a=\cos\left(k\pi+\frac{1}{2}\alpha\right),\quad \cos\frac{1}{2}a=\cos\left(k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\alpha\right),$$
$$\sin\frac{1}{2}a=\sin\left(k\pi+\frac{1}{2}\alpha\right),\quad \sin\frac{1}{2}a=\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\alpha\right).$$

Если для k возьмемъ четное число, то эти формулы примутъ видъ:

$$\cos\tfrac{1}{2}a=\cos\tfrac{1}{2}\alpha,\quad \cos\tfrac{1}{2}a=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\alpha\right)=\sin\tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$\sin\tfrac{1}{2}a=\sin\tfrac{1}{2}\alpha,\quad \sin\tfrac{1}{2}a=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\alpha\right)=\cos\tfrac{1}{2}\alpha;$$

а если k будетъ число нечетное, то

$$\cos\tfrac{1}{2}a=-\cos\tfrac{1}{2}\alpha,\quad \cos\tfrac{1}{2}a=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\alpha\right)=-\sin\tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$\sin\tfrac{1}{2}a=-\sin\tfrac{1}{2}\alpha,\quad \sin\tfrac{1}{2}a=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\alpha\right)=-\cos\tfrac{1}{2}\alpha;$$

откуда слѣдуетъ, что $\cos\frac{1}{2}a$ и $\sin\frac{1}{2}a$ имѣютъ каждый по четыре значенія $\pm\cos\frac{1}{2}\alpha$, $\pm\sin\frac{1}{2}\alpha$.

Если дана дуга a, то знаки $\sin\frac{1}{2}a$ и $\cos\frac{1}{2}a$ извѣстны; извѣстно также, какое изъ этихъ двухъ количествъ будетъ имѣть большее абсолютное значеніе. Эти замѣчанія позволяютъ опредѣлить, въ каждомъ случаѣ, знаки, которые должно взять въ формулахъ (2), чтобы получить значенія $\cos\frac{1}{2}a$ и $\sin\frac{1}{2}a$.

27. Выраженіе $\operatorname{tang}\frac{1}{2}a$ въ функціи $\operatorname{tang}a$.—Если въ формулѣ

$$\operatorname{tang}2a=\frac{2\operatorname{tang}a}{1-\operatorname{tang}^2a},$$

замѣнимъ a чрезъ $\frac{1}{2}a$, то получимъ

$$\operatorname{tang}a=\frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}a};$$

откуда, полагая

$$\operatorname{tang}a=b,\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a=x,$$

будемъ имѣть уравненіе:

$$(3)\qquad x^2+\frac{2}{b}x-1=0;$$

изъ котораго выводимъ

$$(4)\qquad x=-\frac{1}{b}\pm\sqrt{\frac{1}{b^2}+1}.$$

Чтобы узнать, что представляютъ эти два корня уравненія (3), положимъ, что α будетъ опредѣленная дуга, имѣющая тангенсомъ b; всѣ значенія дуги a будутъ даны формулою

$$a=k\pi+\alpha,$$

почему значенія x опредѣлятся изъ слѣдующей формулы:

$$x=\operatorname{tang}\left(k\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\alpha\right).$$

Если k будетъ четное число $2n$, то эта формула приметъ видъ:

$$x=tang\left(n\pi+\frac{1}{2}\alpha\right)=tang\frac{1}{2}\alpha,$$

и, если k будетъ число нечетное $2n+1$, то

$$x=tang\left(n\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\alpha\right)=tang\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\alpha\right)=-cot\frac{1}{2}\alpha;$$

откуда слѣдуетъ, что x имѣетъ два значенія, $tang\frac{1}{2}\alpha$ и $-cot\frac{1}{2}\alpha$, произведеніе которыхъ равно -1.

Если дуга a дана, то легко опредѣлить, который изъ двухъ корней уравненія (3) равенъ $tang\frac{1}{2}a$, ибо заранѣе извѣстенъ знакъ этого тангенса. Положимъ, напримѣръ, что желаютъ найти $tang\frac{\pi}{8}$, зная, что $tang\frac{\pi}{4}=1$; положимъ $b=1$ въ формулѣ (4), которая, такъ какъ $tang\frac{\pi}{8}$ положителенъ, дастъ

$$tang\frac{\pi}{8}=-1+\sqrt{2}.$$

28. Можно выразить $tang\frac{1}{2}a$ въ функціи $sin a$ и $cos a$ посредствомъ формулы, которая часто употребляется. Имѣемъ

$$tang\frac{1}{2}a=\frac{sin\frac{1}{2}a}{cos\frac{1}{2}a}=\frac{2sin\frac{1}{2}a\,cos\frac{1}{2}a}{2cos^2\frac{1}{2}a}=\frac{2sin^2\frac{1}{2}a}{2sin\frac{1}{2}a\,cos\frac{1}{2}a},$$

и, пользуясь формулами выведенными прежде, найдемъ

$$tang\frac{1}{2}a=\frac{sin a}{1+cos a}=\frac{1-cos a}{sin a}.$$

Замѣняя $sin a$ чрезъ $\sqrt{1-cos^2 a}$, получимъ еще

$$tang\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{\frac{1-cos a}{1+cos a}}.$$

29. Уравненіе, изъ котораго опредѣляется $cos\frac{a}{3}$, когда данъ $cos a$.—Если въ формулѣ

$$cos\,3a=4\,cos^3 a-3\,cos a,$$

замѣнимъ a чрезъ $\frac{a}{3}$, то получимъ

$$cos a=4\,cos^3\frac{a}{3}-3\,cos\frac{a}{3},$$

или, полагая

$$cos a=b,\ cos\frac{a}{3}=x,$$

$$x^3-\frac{3}{4}x-\frac{b}{4}=0.$$

Это уравненіе третьей степени и, какъ извѣстно изъ алгебры, имѣетъ три вещественные корня. Это можно показать слѣдующимъ образомъ: пусть α будетъ опредѣленная дуга, косинусъ которой есть b; значенія a выражены формулою

$$a=2k\pi\pm\alpha,$$

а значенія x слѣдующей:

$$x=cos\left(\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\alpha}{3}\right),$$

гдѣ k можетъ быть любое цѣлое число—положительное, отрицательное, нуль. Такимъ образомъ, какое бы ни было k, можно написать

$$k=3n+i,$$

гдѣ i одно изъ чиселъ 0, 1 или 2; слѣдовательно,

$$x=cos\left(2n\pi+\frac{2i\pi}{3}\pm\frac{\alpha}{3}\right)=cos\left(\frac{2i\pi}{3}\pm\frac{\alpha}{3}\right);$$

но дуги

$$-\frac{\alpha}{3},\ \frac{4\pi}{3}-\frac{\alpha}{3},\ \frac{2\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}$$

имѣютъ косинусы, равные соотвѣтственно (n° 9) косинусамъ дугъ

$$\frac{\alpha}{3},\ \frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3},\ \frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3};$$

такимъ образомъ x имѣетъ три различныя значенія

$$cos\frac{\alpha}{3},\ cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right),\ cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right),$$

и большаго числа ихъ не можетъ имѣть.

30. Уравненіе, изъ котораго опредѣляется $sin\frac{a}{3}$, когда данъ $sin a$.—Если въ формулѣ

$$sin 3a = 3sin a - 4sin^3 a,$$

замѣнимъ a чрезъ $\frac{a}{3}$, то получимъ

$$sin a = 3sin\frac{a}{3} - 4sin^3\frac{a}{3};$$

полагая,

$$sin a = b,\ sin\frac{a}{3} = x,$$

получимъ уравненіе

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{b}{4} = 0,$$

которое можетъ быть выведено изъ уравненія n° 29 замѣною b чрезъ $-b$.

Чтобы узнать, что представляютъ три корня этого уравненія, положимъ, что α будетъ опредѣленная дуга, имѣющая синусомъ b; значенія a будутъ даны формулами:

$$a = 2k\pi + \alpha,\ a = (2k+1)\pi - \alpha,$$

а значенія x слѣдующими:

$$x = sin\left(\frac{2k\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right),\ x = sin\left(\frac{2k+1}{3}\pi - \frac{\alpha}{3}\right).$$

Пусть $k = 3n + i$, гдѣ i одно изъ чиселъ 0, 1, 2; эти формулы примутъ видъ:

$$x = sin\left(2n\pi + \frac{2i\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) = sin\left(\frac{2i\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right),$$

$$x = sin\left(2n\pi + \frac{2i+1}{3}\pi - \frac{\alpha}{3}\right) = sin\left(\frac{2i+1}{3}\pi - \frac{\alpha}{3}\right).$$

Но дуги

$$\frac{3\pi}{3} - \frac{\alpha}{3},\ \frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{3},\ \frac{5\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}$$

имѣютъ соотвѣтственно (n° 9) тѣ же синусы, что и дуги

$$\frac{\alpha}{3},\ \frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3},\ \frac{4\pi}{3} + \frac{\alpha}{3};$$

слѣдовательно, x имѣетъ три различныя значенія

$$sin\frac{\alpha}{3},\ sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right),\ sin\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right),$$

и больше ихъ имѣть не можетъ.

31. Уравненіе, изъ котораго опредѣляется $tang\frac{a}{3}$, когда данъ $tang a$.—Если въ формулѣ

$$tang 3a = \frac{3tang a - tang^3 a}{1 - 3\,tang^2 a}$$

замѣнимъ a чрезъ $\frac{a}{3}$, то получимъ

$$tang a = \frac{3\,tang\frac{a}{3} - tang^3\frac{a}{3}}{1 - 3\,tang^2\frac{a}{3}},$$

и, положивъ

$$tang a = b,\ tang\frac{a}{3} = x,$$

будемъ имѣть

$$b = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2},$$

или

$$x^3 - 3bx^2 - 3x + b = 0.$$

Такимъ образомъ мы пришли къ уравненію третьей степени. Чтобы узнать, что представляютъ корни этого уравненія, обозначимъ чрезъ α опредѣленную дугу, имѣющую тангенсомъ b; значенія a будутъ даны формулою:

$$a = k\pi + \alpha,$$

а значенія x формулою:

$$x = tang\left(\frac{k\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right).$$

Положимъ, что $k = 3n + i$, гдѣ i есть одно изъ чиселъ 0, 1 или 2; предыдущая формула приметъ видъ:

$$x = tang\left(n\pi + \frac{i\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) = tang\left(\frac{i\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right),$$

откуда слѣдуетъ, что x имѣетъ три значенія

$$tang\frac{\alpha}{3},\ tang\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right),\ tang\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right),$$

и больше ихъ имѣть не можетъ

Если данное значеніе b безконечно большое, то уравненіе относительно x обращается въ уравненіе второй степени

$$3x^2-1=0,$$

которое имѣетъ только два корня, а именно $+\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Съ другой стороны, такъ какъ $\alpha=\frac{\pi}{2}$, то выраженія корней уравненія будутъ

$$tang\frac{\pi}{6},\ tang\frac{\pi}{2},\ tang\frac{5\pi}{6};$$

откуда слѣдуетъ, что, при $b=\infty$, одинъ изъ корней этого уравненія равенъ безконечности, а два другіе обращаются въ $tang\frac{\pi}{6}$ и $tang\frac{5\pi}{6}$. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$tang\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad tang\frac{5\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

32. Вообще, если мы желаемъ получить $sin\frac{a}{m}$, $cos\frac{a}{m}$ или $tang\frac{a}{m}$, когда извѣстны $sina$, $cosa$, $tanga$, то мы должны сперва составить уравненія, которыя даютъ $sinma$, $cosma$ или $tangma$ въ функціяхъ $sina$, $cosa$ или $tanga$; затѣмъ, замѣняя $\frac{a}{m}$ чрезъ a, получимъ уравненіе, изъ котораго опредѣляется искомое неизвѣстное. Это уравненіе, смотря по обстоятельствамъ, будетъ m-ой или $2m$-ой степени. Въ пятой главѣ мы разсмотримъ вполнѣ этотъ важный вопросъ, а теперь ограничимся замѣчаніемъ, что опредѣленіе $sin\frac{a}{m}$, $cos\frac{a}{m}$ или $tang\frac{a}{m}$ зависитъ только отъ уравненій второй степени, если m будетъ степенью 2, такъ какъ, найдя $sin\frac{1}{2}a$, $cos\frac{1}{2}a$ и $tang\frac{1}{2}a$ въ функціяхъ $sina$, $cosa$ или $tanga$, мы можемъ, тѣмъ же путемъ, найти $sin\frac{a}{4}$, $cos\frac{a}{4}$ и $tang\frac{a}{4}$, $sin\frac{a}{8}$, $cos\frac{a}{8}$ и $tang\frac{a}{8}$,....

Опредѣленіе тригонометрическихъ линій нѣкоторыхъ дугъ.

33. Для безконечнаго числа дугъ, заключающихся между 0 и $\frac{\pi}{2}$, можно вычислить тригонометрическія линіи посредствомъ простого извлеченія квадратныхъ корней.

О дугахъ, заключающихся въ формулѣ $\frac{n\pi}{2^m}$. — Если начнемъ съ дуги $\frac{\pi}{2}$, то, по способу n°° 25 и 26, получимъ синусы и косинусы дугъ

$$\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{8},\ \frac{\pi}{16},\ldots,$$

а потомъ можемъ опредѣлить синусы и косинусы кратныхъ этихъ дугъ.

Такимъ образомъ получимъ формулы:

$$cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\qquad sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$

$$cos\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2},\quad sin\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2},$$

.....,

законъ составленія которыхъ очевиденъ. Такимъ образомъ, каковы бы ни были цѣлыя числа m и n, мы можемъ вычислить, путемъ простого извлеченія квадратныхъ корней, синусъ и косинусъ дуги $\frac{n\pi}{2^m}$ и, слѣдовательно, другія тригонометрическія линіи этой дуги.

34. О дугахъ, заключающихся въ формулѣ $\frac{n\pi}{3.2^m}$. — Дуги $\frac{\pi}{3}$ и

$\frac{2\pi}{3}$ имѣютъ одинъ и тотъ же синусъ, такъ какъ онѣ пополнительны. Имѣемъ

$$\sin\frac{\pi}{3}=\sin 2\frac{\pi}{3}=2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}$$

и, слѣдовательно,

$$1=2\cos\frac{\pi}{3};$$

откуда получаемъ

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\quad \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

или, такъ какъ $\frac{\pi}{3}$ есть дополненіе дуги $\frac{\pi}{6}$,

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

Начиная съ дуги $\frac{\pi}{6}$, мы получимъ, слѣдуя n°° 25 и 26, синусы и косинусы дугъ:

$$\frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{24},\ \ldots;$$

найдемъ, напримѣръ, при помощи формулъ n° 25,

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},\quad \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},$$

и, при помощи формулъ n° 26,

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}),\quad \sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

Мы видимъ, что посредствомъ извлеченія квадратныхъ корней можно вычислить тригонометрическія линіи дуги $\frac{n\pi}{3.2^m}$, каковы бы ни были цѣлыя числа m и n.

35. О дугахъ, заключающихся въ формулѣ $\frac{n\pi}{5.2^m}$.—Имѣемъ

$$2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}=\sin\frac{2\pi}{5},$$

$$2\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\sin\frac{4\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{5},$$

и, перемноживъ эти двѣ формулы, получимъ

$$4\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=1;$$

но первая часть этого равенства равна удвоенной суммѣ $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}$ или удвоенной разности $\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{2\pi}{5}$; слѣдовательно, имѣемъ

$$\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2};$$

возвышая это равенство въ квадратъ и складывая съ предыдущимъ, получимъ

$$\left(\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2=\frac{5}{4},$$

откуда

$$\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Зная, такимъ образомъ, сумму и разность косинусовъ дугъ $\frac{\pi}{5}$ и $\frac{2\pi}{5}$, получимъ значенія этихъ косинусовъ, а именно:

$$\cos\frac{\pi}{5}=\sin\frac{3\pi}{10}=\frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{10}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Отъ значеній $\cos\frac{\pi}{5}$ и $\cos\frac{2\pi}{5}$ тотчасъ же перейдемъ къ значеніямъ $\sin\frac{\pi}{5}$ и $\sin\frac{2\pi}{5}$; такимъ образомъ получимъ:

$$\sin\frac{\pi}{5}=\cos\frac{3\pi}{10}=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{2\pi}{5}=\cos\frac{\pi}{10}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Начиная съ дуги $\frac{\pi}{10}$, мы получимъ, путемъ способовъ n°° 25 и 26, синусы и косинусы дугъ

$$\frac{\pi}{20}, \quad \frac{\pi}{40}, \ldots,$$

такъ что, посредствомъ извлеченія квадратныхъ корней, можно получить тригонометрическія линіи дуги $\frac{n\pi}{5.2^m}$, каковы бы ни были цѣлыя числа m и n.

36. О дугахъ, заключающихся въ формулѣ $\frac{n\pi}{3.5.2^m}$.—Имѣемъ

$$\frac{\pi}{15} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{10},$$

и, слѣдовательно,

$$\sin\frac{\pi}{15} = \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{10} - \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{10},$$

$$\cos\frac{\pi}{15} = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{10} + \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{10},$$

и, замѣняя синусы и косинусы дугъ $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{10}$ чрезъ вышенайденныя ихъ значенія, получимъ

$$\cos\frac{\pi}{15} = \frac{1}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{3}}{5}(-1+\sqrt{5}),$$

$$\cos\frac{\pi}{15} = \frac{\sqrt{3}}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \frac{1}{8}(-1+\sqrt{5}),$$

откуда слѣдуетъ, что посредствомъ извлеченія квадратныхъ корней можно еще вычислить тригонометрическія линіи дуги $\frac{n\pi}{3.5.2^m}$ каковы бы ни были цѣлыя числа m и n.

37. Мы дополнимъ предыдущее, составивъ здѣсь таблицу синусовъ и косинусовъ дугъ кратныхъ $\frac{\pi}{20}$. Начнемъ съ формулъ

$$\sin\frac{2\pi}{20} = \cos\frac{8\pi}{20} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4},$$

$$\sin\frac{8\pi}{20} = \cos\frac{2\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{4\pi}{20} = \cos\frac{6\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{6\pi}{20} = \cos\frac{4\pi}{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

данныхъ въ n°36. Будемъ имѣть $\sin\frac{\pi}{20}$ и $\cos\frac{\pi}{20}$, $\sin\frac{3\pi}{20}$ и $\cos\frac{3\pi}{20}$, полагая послѣдовательно $a = \frac{2\pi}{20}$ и $a = \frac{6\pi}{20}$ въ формулахъ:

$$\sin\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin a} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin a}$$

$$\cos\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin a} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin a};$$

получимъ

$$\sin\frac{\pi}{20} = \cos\frac{9\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{9\pi}{20} = \cos\frac{\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$

и

$$\sin\frac{3\pi}{20} = \cos\frac{7\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{7\pi}{20} = \cos\frac{3\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}};$$

наконецъ, имѣемъ

$$\sin\frac{5\pi}{20} = \cos\frac{5\pi}{20} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Такимъ образомъ, соединяя полученные результаты, имѣемъ:

$$\sin\frac{\pi}{20} = \cos\frac{9\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{2\pi}{20} = \cos\frac{8\pi}{20} = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}),$$

Государственная БИБЛІОТЕКА

$$\sin\frac{3\pi}{20}=\cos\frac{7\pi}{20}=\frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}}-\frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{4\pi}{20}=\cos\frac{6\pi}{20}=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{5\pi}{20}=\cos\frac{5\pi}{20}=\frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\sin\frac{6\pi}{20}=\cos\frac{4\pi}{20}=\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}),$$

$$\sin\frac{7\pi}{20}=\cos\frac{3\pi}{20}=\frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}}+\frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{8\pi}{20}=\cos\frac{2\pi}{20}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{9\pi}{20}=\cos\frac{\pi}{20}=\frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}}+\frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}.$$

При помощи этихъ формулъ мы можемъ вычислять синусы и косинусы дугъ кратныхъ $\frac{\pi}{20}$ съ какой угодно точностью.

38. Также легко составить таблицу синусовъ и косинусовъ дугъ кратныхъ $\frac{\pi}{60}$. Девять изъ этихъ дугъ кратныя $\frac{\pi}{20}$ и, слѣдовательно, ихъ синусы и ихъ косинусы входятъ въ составъ таблицы, которую мы только что написали; далѣе мы находимъ между дугами кратными $\frac{\pi}{60}$ дуги $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{12}$ и ихъ дополнительныя; синусы же и косинусы этихъ дугъ нами получены въ n° 34. Шестнадцать остальныхъ дугъ кратныхъ $\frac{\pi}{60}$ заключаютъ восемь дугъ кратныхъ $\frac{\pi}{30}$, а именно:

$$\frac{\pi}{30},\ \frac{2\pi}{30},\ \frac{4\pi}{30},\ \frac{7\pi}{30},$$

и ихъ дополнительныя; затѣмъ, наконецъ, имѣемъ дуги

$$\frac{\pi}{60},\ \frac{7\pi}{60},\ \frac{11\pi}{60},\ \frac{13\pi}{60},$$

и ихъ дополнительныя. Синусы и косинусы всѣхъ этихъ дугъ получимъ при помощи выше приведенной таблицы, если примѣнимъ способъ, которымъ мы уже пользовались по отношенію къ дугѣ $\frac{\pi}{15}$; дѣйствительно, достаточно для этого обратиться къ тождествамъ

$$\frac{\pi}{30}=\frac{\pi}{3}-\frac{6\pi}{20},\quad \frac{\pi}{60}=\frac{7\pi}{20}-\frac{\pi}{3},$$

$$\frac{2\pi}{30}=\frac{8\pi}{20}-\frac{\pi}{3},\quad \frac{7\pi}{60}=\frac{9\pi}{20}-\frac{\pi}{3},$$

$$\frac{4\pi}{30}=\frac{\pi}{3}-\frac{4\pi}{20},\quad \frac{11\pi}{60}=\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{20},$$

$$\frac{7\pi}{30}=\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{20},\quad \frac{13\pi}{60}=\frac{11\pi}{20}-\frac{\pi}{3};$$

такимъ образомъ найдемъ:

$$\sin\frac{\pi}{30}=\cos\frac{14\pi}{30}=\frac{1}{8}\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\frac{1}{8}(1+\sqrt{5}),$$

$$\sin\frac{2\pi}{30}=\cos\frac{13\pi}{30}=\frac{1}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\frac{1}{8}\sqrt{3}(-1+\sqrt{5}),$$

$$\sin\frac{4\pi}{30}=\cos\frac{11\pi}{30}=\frac{1}{8}\sqrt{3}(1+\sqrt{5})-\frac{1}{8}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{7\pi}{30}=\cos\frac{8\pi}{30}=\frac{1}{8}\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\frac{1}{8}(-1+\sqrt{5}),$$

$$\sin\frac{8\pi}{30}=\cos\frac{7\pi}{30}=\frac{1}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\frac{1}{8}\sqrt{3}(-1+\sqrt{5}),$$

$$\sin\frac{11\pi}{30}=\cos\frac{4\pi}{30}=\frac{1}{8}(1+\sqrt{5})+\frac{1}{8}\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}),$$

$$\sin\frac{13\pi}{30}=\cos\frac{2\pi}{30}=\frac{1}{8}\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\frac{1}{8}(-1+\sqrt{5}),$$

$$\sin\frac{14\pi}{30}=\cos\frac{\pi}{30}=\frac{1}{8}\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\frac{1}{8}\sqrt{3}(1+\sqrt{5}),$$

и

$$\sin\frac{\pi}{60}=\cos\frac{29\pi}{60}=\frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{3-\sqrt{5}}-\frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{7\pi}{60}=\cos\frac{23\pi}{60}=\frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}}-\frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{3+\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{11\pi}{60}=\cos\frac{19\pi}{60}=\frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{3-\sqrt{5}}+\frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{13\pi}{60}=\cos\frac{17\pi}{60}=\frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{3+\sqrt{5}}-\frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{17\pi}{60}=\cos\frac{13\pi}{60}=\frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}}+\frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{3+\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{19\pi}{60}=\cos\frac{11\pi}{60}=\frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}-\frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{3-\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{23\pi}{60}=\cos\frac{7\pi}{60}=\frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{3+\sqrt{5}}+\frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{29\pi}{60}=\cos\frac{\pi}{60}=\frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}+\frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

39. Изъ опредѣленія n°5, синусъ дуги, заключающейся между 0 и π, равенъ половинѣ хорды, стягивающей двойную дугу. Въ частности, синусъ дуги $\frac{\pi}{n}$ равенъ половинѣ стороны правильнаго n-угольника, вписаннаго въ кругъ, радіусъ котораго равенъ единицѣ. Отсюда слѣдуетъ (n°33 и слѣд.), что стороны квадрата, правильнаго шестиугольника, равносторонняго треугольника, правильнаго десятиугольника и правильнаго пятиугольника, вписанныхъ въ кругъ, соотвѣтственно имѣютъ значенія:

$$\sqrt{2},\ 1,\ \sqrt{3},\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}};$$

точно также стороны правильныхъ вписанныхъ въ кругъ 15-ти и 30-ти-угольниковъ имѣютъ значенія

$$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\frac{1}{4}\sqrt{3}(-1+\sqrt{5}).$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}).$$

Такимъ образомъ мы получаемъ извѣстныя предложенія геометріи относительно квадрата и правильнаго шестиугольника. Если радіусъ круга обозначимъ чрезъ R, а стороны вписанныхъ правильныхъ десятиугольника и пятиугольника чрезъ D и P, то формулы

$$\frac{D}{R}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\quad \frac{P}{R}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2},$$

дадутъ

$$D^2+R^2=P^2,\quad \left(D+\frac{R}{2}\right)^2=R^2+\left(\frac{R}{2}\right)^2.$$

Первая изъ этихъ формулъ выражаетъ, что *квадратъ стороны правильнаго вписаннаго пятиугольника равенъ квадрату стороны правильнаго вписаннаго десятиугольника, увеличенному на квадратъ радіуса.*

Вторая формула показываетъ, что *для того, чтобы получить сторону правильнаго вписаннаго десятиугольника, достаточно построить прямоугольный треугольникъ, въ которомъ одинъ изъ катетовъ равенъ радіусу круга, а другой—половинѣ этого радіуса, и затѣмъ взять излишекъ гипотенузы этого треугольника надъ меньшимъ катетомъ.* Та же формула можетъ быть написана такъ:

$$\frac{R}{D}=\frac{D}{R-D},$$

и тогда она выражаетъ, что D есть средняя пропорціональная между R и $R-D$, т. е., что *сторона правильнаго вписаннаго десятиугольника равна большей части радіуса, раздѣленнаго въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.*

Формулы, выведенныя въ n°33 и слѣдующихъ, приводятъ къ построеніямъ, которыя употребляются въ геометріи для того, чтобы вписать въ кругъ правильный шестиугольникъ и правильный десятиугольникъ; затѣмъ вписываніе равносторонняго треугольника и правильнаго пятиугольника становится очевиднымъ. Что же касается до построенія правильныхъ 15-ти и 30-ти-угольника, то оно можетъ быть получено также очень легко; въ самомъ дѣлѣ, дуга, стягиваемая стороною правильнаго вписаннаго пятнадцатиугольника, какъ мы выше замѣтили, равна разности дугъ, стягиваемыхъ сторонами правильнаго шестиугольника и правильнаго десятиугольника.

Замѣчанія о соотношеніяхъ между различными тригонометрическими линіями.

64. Формулы, относящіяся къ сложенію дугъ, и всѣ тѣ, которыя мы изъ нихъ вывели, справедливы, каковы бы ни были разсматриваемыя дуги. Слѣдовательно, эти формулы являются истинными тождествами. Кромѣ того онѣ позволяютъ подвергать различнымъ преобразованіямъ выраженія, содержащія нѣсколько тригонометрическихъ линій, и, какъ слѣдствія, получать новыя тождества.

Напримѣръ, мы нашли въ n° 35, что

$$\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2},$$

или

$$1+2\sin\frac{\pi}{10}=2\sin\frac{3\pi}{10};$$

умноживъ на $\cos a$, получимъ тождественную формулу

$$\cos a+2\sin\frac{\pi}{10}\cos a=2\sin\frac{3\pi}{10}\cos a,$$

которую можно написать слѣдующимъ образомъ:

$$(1)\quad \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+\sin\left(\frac{\pi}{10}-a\right)+\sin\left(\frac{\pi}{10}+a\right)= \\ \quad =\sin\left(\frac{3\pi}{10}-a\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{10}+a\right). \end{cases}$$

Разсмотримъ выраженіе

$$\sin a+\sin b+\sin c-4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2},$$

въ которомъ a, b, c обозначаютъ какія бы то ни было дуги. Послѣдній членъ этого выраженія равенъ

$$-2\cos\frac{a}{2}\left(\cos\frac{b-c}{2}+\cos\frac{b+c}{2}\right),$$

или равенъ

$$-\cos\frac{a+b-c}{2}-\cos\frac{a-b+c}{2}-$$
$$-\cos\frac{-a+b+c}{2}-\cos\frac{a+b+c}{2};$$

слѣдовательно, данное выраженіе можетъ быть написано такимъ образомъ:

$$\left(\sin a+\sin\frac{b+c-a-\pi}{2}\right)+\left(\sin b+\sin\frac{a+c-b-\pi}{2}\right)$$
$$+\left(\sin c+\sin\frac{a+b-c-\pi}{2}\right)+\sin\frac{a+b+c-\pi}{2};$$

преобразовавъ затѣмъ въ произведенія суммы тригонометрическихъ линій, заключенныя въ скобкахъ, и замѣняя послѣдній членъ выраженіемъ $2\sin\frac{a+b+c-\pi}{4}\cos\frac{a+b+c-\pi}{4}$, получимъ формулу:

$$(2)\quad \begin{cases} \sin a+\sin b+\sin c-4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} \\ =2\sin\frac{a+b+c-\pi}{4}\left(\cos\frac{3a-b-c+\pi}{4}+\cos\frac{3b-c-a+\pi}{4}\right. \\ \qquad \left.+\cos\frac{3c-a-b+\pi}{4}+\cos\frac{a+b+c-\pi}{4}\right), \end{cases}$$

которая будетъ тождественна, каковы бы ни были дуги a, b, c. Мы видимъ, что если эти дуги удовлетворяютъ отношенію

$$a+b+c=(4n+1)\pi,$$

въ которомъ n обозначаемъ цѣлое число, положительное, отрицательное, нуль, то будемъ имѣть

$$(3)\qquad \sin a+\sin b+\sin c-4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}=0.$$

41. Если требуется узнать, тождество ли данное равенство

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_m)=0,$$

гдѣ $f(x_1,\ x_2,\ldots x_m)$ обозначаетъ цѣлую функцію отъ x_1, x_2,$\ldots x_m$, а x_1, x_2,$\ldots.x_m$ различныя тригонометрическія линіи, то самый общій пріемъ для этого состоитъ въ томъ, что мы выбираемъ одну изъ дугъ, тригонометрическія линіи которой входятъ въ данное равенство, и преобразовываемъ послѣднее такъ, чтобы послѣ преобразованія изъ всѣхъ тригонометрическихъ линій выбранной дуги осталась только одна *). Располагая лѣвую часть преобразованнаго равенства по степенямъ этой тригонометрической линіи и приравнивая коэффиціенты при всѣхъ степеняхъ ея нулю, мы получимъ нѣсколько новыхъ равенствъ, въ которыхъ число входящихъ не опредѣленныхъ будетъ на единицу меньше, чѣмъ въ данномъ равенствѣ, и эти равенства должны быть тождествами. Подвергая подобнымъ же преобразованіямъ полученныя равенства и продолжая дѣйствовать такъ же и далѣе, мы придемъ къ такимъ соотношеніямъ, которыя будутъ очевидными тождествами, если только, конечно, предложенное равенство само тождество. Но, во многихъ случаяхъ, тождественность разсматриваемыхъ формулъ можно легко установить, воспользовавшись надлежащимъ образомъ тѣми основными формулами, которыя мы вывели. Такъ, въ тождественности формулы (2) непосредственно убѣждаемся, преобразовавъ въ сумму произведенія, находящіяся въ каждой изъ двухъ ея

*) Выразивъ тригонометрическія линіи выбранной дуги въ функціяхъ *tang* половины этой дуги, мы избѣжимъ (n° 28) введенія ирраціональностей.
Примѣчаніе Ред.

частей. Что же касается до формулы (1), то ее легко повѣрить, раскрывъ каждый изъ синусовъ, въ ней заключающихся.

42. Если уравненіе между различными тригонометрическими линіями не тождественно, но оно удовлетворяется при установленіи нѣкотораго числа соотношеній между дугами, которыя въ него входятъ, то можемъ исключить изъ него то же число дугъ и тогда получимъ равенство, которое должно быть тождествомъ. Напримѣръ, уравненіе (3) не тождественно, но оно удовлетворяется, если дуги a, b, c подчинить условію

$$a+b+c=(4n+1)\pi, \tag{4}$$

гдѣ n означаетъ цѣлое число. Чтобы убѣдиться въ этомъ, достаточно замѣнить c чрезъ $(4n+1)\pi-a-b$ и установить тождественность полученнаго равенства:

$$\sin a+\sin b+\sin(a+b)-4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin\frac{a+b}{2}=0;$$

тождественность становится очевидною, если это равенство напишемъ такъ:

$$2\sin\frac{a+b}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2}+\cos\frac{a+b}{2}-2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\right)=0.$$

Мы видимъ, что уравненіе (3) есть слѣдствіе уравненія (4), но оно болѣе обще, чѣмъ послѣднее; въ самомъ дѣлѣ, согласно формулѣ (2), оно удовлетворяется не только значеніями a, b, c, которыя удовлетворяютъ уравненію (4), но еще и тѣми, которыя удовлетворяютъ уравненію

$$\cos\frac{3a-b-c+\pi}{4}+\cos\frac{3b-c-a+\pi}{4}$$
$$+\cos\frac{3c-a-b+\pi}{4}+\cos\frac{a+b+c-\pi}{4}=0.$$

Только въ очень рѣдкихъ случаяхъ алгебраическое уравненіе между тригонометрическими линіями нѣсколькихъ дугъ можетъ быть замѣнено однимъ или нѣсколькими алгебраическими уравненіями между самими дугами. Оканчивая эту главу, мы приведемъ примѣръ, въ которомъ встрѣчается такой случай.

Разсмотримъ равенство

$$\cos a+\cos b+\cos c=1+4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2};$$

если замѣнимъ $\cos a+\cos b$ чрезъ $2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$ или чрезъ $2\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}-2\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b}{2}$, и $\cos c$ чрезъ $1-2\sin^2\frac{c}{2}$, то предложенное равенство приметъ видъ:

$$\left(\sin\frac{c}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\right)^2-\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}=0,$$

или

$$\left(\sin\frac{c}{2}+\cos\frac{a-b}{2}\right)\left(\sin\frac{c}{2}-\cos\frac{a+b}{2}\right)=0,$$

или, наконецъ,

$$\sin\frac{a+b+c-\pi}{4}\sin\frac{-a+b+c+\pi}{4}$$
$$\times\sin\frac{a-b+c+\pi}{4}\sin\frac{a+b-c+\pi}{4}=0;$$

но, чтобы это соотношеніе имѣло мѣсто, необходимо и достаточно, чтобы одна какая нибудь изъ четырехъ дугъ:

$$\frac{a+b+c-\pi}{4},\quad\frac{-a+b+c+\pi}{4},$$
$$\frac{a-b+c+\pi}{4},\quad\frac{a+b-c+\pi}{4},$$

была равна кратному числу $n\pi$ полуокружностей. Такимъ образомъ, предложенное соотношеніе тогда и только тогда справедливо, когда дуги a, b, c удовлетворяютъ по крайней мѣрѣ одному изъ четырехъ условій:

$$a+b+c=(4n+1)\pi,\quad -a+b+c=(4n-1)\pi,$$
$$a-b+c=(4n-1)\pi,\quad a+b-c=(4n-1)\pi.$$

Упражненія.

I. Если обозначимъ чрезъ S_1 сумму тангенсовъ m дугъ a, b, c,...., k, чрезъ S_2 сумму произведеній по два этихъ же тангенсовъ, чрезъ S_3 сумму ихъ произведеній по три, и т. д., наконецъ, чрезъ S_m произведеніе всѣхъ тангенсовъ, то будемъ имѣть слѣдующую общую формулу

$$\operatorname{tang}(a+b+c+\ldots+k)=\frac{S_1-S_3+S_5-\ldots}{1-S_2+S_4-\ldots};$$

требуется показать справедливость этой формулы и вывести изъ нея выраженіе для $tangma$ въ функціи $tanga$.

II. При тѣхъ же условіяхъ, что и въ предыдущемъ вопросѣ, имѣемъ

$$\sin(a+b+c+\ldots+k)=(S_1-S_3+S_5-\ldots)\cos a\,.\,\cos b\ldots\cos k,$$
$$\cos(a+b+c+\ldots+k)=(1-S_2+S_4-\ldots)\cos a\,.\,\cos b\ldots\cos k;$$

показать справедливость этихъ формулъ и вывести изъ нихъ выраженія для $\sin ma$ и $\cos ma$ въ функціи $\sin a$ и $\cos a$.

III. Составить уравненіе, изъ котораго можно было бы опредѣлить $\cos\frac{a}{5}$, когда данъ $\cos a$, и другое, изъ котораго можно было бы опредѣлить $\sin\frac{a}{5}$, когда данъ $\sin a$. Рѣшить оба эти уравненія для случаевъ, когда a имѣетъ одно изъ значеній $0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}$, и въ каждомъ изъ этихъ случаевъ опредѣлить, что выражаютъ корни.

IV. Окружность круга раздѣлена на n равныхъ частей; если изъ точекъ дѣленія опустить перпендикуляры на какой нибудь діаметръ, то сумма перпендикуляровъ, расположенныхъ по одну сторону діаметра, будетъ равна суммѣ перпендикуляровъ, расположенныхъ по другую сторону.

V. Вычислить стороны правильныхъ многоугольниковъ о 3, 6, 5, 10, 15, 20 и 30 сторонахъ, описанныхъ около круга, котораго радіусъ равенъ единицѣ.

VI. Найти алгебраическое соотношеніе между дугами a, b, c, удовлетворяющими одному изъ двухъ уравненій

$$\operatorname{tang} a+\operatorname{tang} b+\operatorname{tang} c=\operatorname{tang} a\operatorname{tang} b\operatorname{tang} c,$$
$$\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c=1.$$

ГЛАВА ВТОРАЯ.

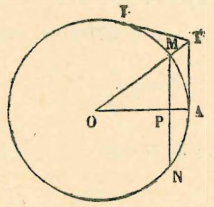
О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХЪ ТАБЛИЦАХЪ.

Предварительныя теоремы.

43. Для того, чтобы пользоваться круговыми функціями, необходимо имѣть средства для вычисленія значеній тригонометрическихъ линій какой бы то ни было данной дуги, и наоборотъ—для вычисленія значеній дуги, когда мы знаемъ одну изъ ея тригонометрическихъ линій. Для этого необходимо имѣть таблицу, которая давала бы возможность узнавать значенія тригонометрическихъ линій, соотвѣтствующія послѣдовательнымъ значеніямъ дуги, заключающимся между 0 и $\frac{\pi}{2}$, промежутки между которыми были бы достаточно малы. Мы покажемъ, какимъ образомъ можно составить такую таблицу; затѣмъ увидимъ, какимъ образомъ, при посредствѣ этой таблицы, можно найти тригонометрическія линіи какой бы ни было данной дуги, и, наоборотъ, какъ можно найти наименьшую положительную дугу, соотвѣтствующую данной тригонометрической линіи. Но сначала мы должны доказать нѣсколько предварительныхъ теоремъ, необходимыхъ для той цѣли, которую мы имѣемъ въ виду.

44. Теорема I. — *Всякая дуга, заключающаяся между* 0 *и* $\frac{\pi}{2}$, *больше своего синуса и меньше своего тангенса.*

Фиг. 7.



Пусть (*фиг.* 7) $AM=x$ будетъ дуга, заключающаяся между 0 и $\frac{\pi}{2}$; MP синусъ и AT тангенсъ этой дуги. Продолжимъ MP до встрѣчи ея съ окружностію въ точкѣ N и проведемъ касательную TI; тогда будемъ имѣть: дуга $MAN>MN$ и дуга $AMI<AT+TI$.

*

Но дуга x равна половинѣ MAN или AMI, $\sin x$ равенъ половинѣ MN, а $\operatorname{tang} x$ равенъ каждой изъ линій AT и TI; поэтому будемъ имѣть

$$x > \sin x \text{ и } x < \operatorname{tang} x.$$

Слѣдствіе.—*Если дуга x уменьшается отъ $\frac{\pi}{2}$ до 0, то отношеніе $\frac{\sin x}{x}$ неопредѣленно приближается къ единицѣ.*

Дѣйствительно, такъ какъ $\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, то можно написать

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x},$$

или, дѣля на $\sin x$,

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Отсюда видно, что отношеніе $\frac{x}{\sin x}$ заключается между единицею и дробью $\frac{1}{\cos x}$, предѣлъ которой, для $x=0$, равенъ единицѣ; слѣдовательно,

$$\lim \frac{x}{\sin x} = 1 \text{ или } \lim \frac{\sin x}{x} = 1.$$

45. Теорема II.—*Разность между дугой, заключающейся между 0 и $\frac{\pi}{2}$, и ея синусомъ меньше четвертой и даже шестой части куба этой дуги.*

Чтобы доказать, что разность, о которой идетъ рѣчь, меньше четвертой части куба дуги, достаточно разсмотрѣть неравенство:

$$\operatorname{tang} \frac{x}{2} > \frac{x}{2},$$

выведенное въ n°44; умножая его на $2\cos^2 \frac{x}{2} = 2\left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right)$, получимъ

$$\sin x > x - x \sin^2 \frac{x}{2} \text{ или } x - \sin x < x \sin^2 \frac{x}{2};$$

но $\sin \frac{x}{2}$ меньше $\frac{x}{2}$, и, слѣдовательно, $\sin^2 \frac{x}{2}$ меньше $\frac{x^2}{4}$, а тѣмъ болѣе

$$x - \sin x < \frac{x^3}{4}.$$

46. Что разность $x - \sin x$ менѣе $\frac{x^3}{6}$, то проще всего это докажемъ, исходя изъ формулы

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,$$

выведенной въ n° 22. Замѣняя въ ней x послѣдовательно чрезъ $\frac{x}{3}$, $\frac{x}{3^2}, \ldots, \frac{x}{3^n}$, получимъ

$$3\sin \frac{x}{3} - \sin x = 4\sin^3 \frac{x}{3},$$

$$3\sin \frac{x}{3^2} - \sin \frac{x}{3} = 4\sin^3 \frac{x}{3^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$3\sin \frac{x}{3^n} - \sin \frac{x}{3^{n-1}} = 4\sin^3 \frac{x}{3^n};$$

далѣе, складывая эти равенства, предварительно умноживъ ихъ соотвѣтственно на 1, 3, $3^2, \ldots, 3^{n-1}$, находимъ

$$3^n \sin \frac{x}{3^n} - \sin x = 4\left(\sin^3 \frac{x}{3} + 3\sin^3 \frac{x}{3^2} + \ldots + 3^{n-1}\sin^3 \frac{x}{3^n}\right),$$

или

$$x \cdot \frac{\sin \frac{x}{3^n}}{\left(\frac{x}{3^n}\right)} - \sin x = 4\left(\sin^3 \frac{x}{3} + 3\sin^3 \frac{x}{3^2} + \ldots + 3^{n-1}\sin^3 \frac{x}{3^n}\right).$$

Если цѣлое число n неопредѣленно увеличивается, то дуга $\frac{x}{3^n}$ приближается къ нулю и отношеніе $\frac{\sin \frac{x}{3^n}}{\left(\frac{x}{3^n}\right)}$ приближается къ единицѣ; первая часть предыдущаго равенства имѣетъ своимъ предѣломъ разность $x - \sin x$, слѣдовательно, и вторая часть стремится къ тому же предѣлу. Но такъ какъ синусъ менѣе его дуги, то предѣлъ второй части нашего равенства менѣе того предѣла, къ которому приближается геометрическая прогрессія

$$4\left(\frac{x^3}{3^3} + \frac{x^3}{3^5} + \frac{x^3}{3^7} + \ldots + \frac{x^3}{3^{2n+1}}\right);$$

этотъ же предѣлъ равенъ $\frac{x^3}{6}$, а потому имѣемъ

$$x - \sin x < \frac{x^3}{6}.$$

47. Такимъ образомъ предыдущія теоремы доставляютъ два предѣла, а именно x и $x - \frac{x^3}{6}$, между которыми заключается $\sin x$. Также легко выводятся два предѣла, между которыми заключается $\cos x$; дѣйствительно, имѣемъ

$$\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2},$$

и, такъ какъ $\sin \frac{x}{2}$ заключается между $\frac{x}{2}$ и $\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48}$, то сперва найдемъ

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2},$$

а потомъ

$$\cos x < 1 - 2\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48}\right)^2 \text{ или } < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - 2\left(\frac{x^3}{48}\right)^2,$$

и подавно

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

И такъ, $\cos x$ заключается между $1 - \frac{x^2}{2}$ и $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

Дѣленіе окружности.

48. До сихъ поръ мы выражали дуги ихъ отношеніями къ радіусу, но, въ приложеніяхъ теоріи круговыхъ функцій, гораздо удобнѣе ихъ выражать отношеніями къ окружности. Для этой цѣли согласились раздѣлить цѣлую окружность на 360 равныхъ частей. которымъ дали названіе *градусовъ*, такъ что полуокружность содержитъ 180, а квадрантъ 90 градусовъ. Каждый градусъ подраздѣляется на 60 *минутъ*, и каждая минута на 60 *секундъ*. Градусы, минуты и секунды соотвѣтственно обозначаются °, ′, ″; дуги, меньшія, чѣмъ 1″, выражаются десятичными долями секунды. Такимъ образомъ дуга, содержащая 23 градуса 27 минутъ 31 секунду и 8 десятыхъ секунды, выразится такъ:

$$23°27'31'',8.$$

Если обозначимъ чрезъ x длину дуги, а чрезъ N число содержащихся градусовъ въ этой дугѣ, то будемъ имѣть равенство

$$\frac{x}{\pi} = \frac{N}{180},$$

изъ котораго опредѣлимъ одно изъ чиселъ x или N, когда одно изъ нихъ извѣстно.

Если примемъ секунду за единицу, то для опредѣленія числа x' секундъ, содержащихся въ дугѣ x, будетъ служить формула

$$\frac{x}{\pi} = \frac{x'}{648000}.$$

Напримѣръ, если желаютъ, найти число секундъ, содержащихся въ дугѣ, равной 1, то по этой формулѣ находятъ:

$$x' = \frac{648000}{\pi},$$

гдѣ величина π есть

$$\pi = 3,14159265358979323846\ldots,$$

и, ограничивая вычисленіе тысячными долями секунды,

$$x' = 206264'',806 = 57°17'44'',806.$$

Составленіе таблицы синусовъ и косинусовъ.

49. Чтобы имѣть тригонометрическія линіи какой-нибудь дуги, достаточно знать эти линіи для дугъ, заключающихся между 0 и 90 градусами. Можно даже ограничиться дугами, заключающимися между 0 и 45 градусами, ибо двѣ такія дополнительныя дуги, какъ $45° + x$ и $45° - x$, имѣютъ одинаковыя тригонометрическія линіи. Кромѣ того, если синусы и косинусы извѣстны для всѣхъ дугъ, заключающихся между 0 и 45 градусами, то остальныя четыре тригонометрическія линіи могутъ быть опредѣлены посредствомъ равенствъ, которыя мы вывели въ n° 11.

Послѣ этого мы покажемъ, какимъ образомъ можно составить таблицу синусовъ и косинусовъ для всѣхъ дугъ, возрастающихъ на 10 секундъ, отъ 0 до 45 градусовъ.

Синусъ и косинусъ дуги въ 10 секундъ. — Обозначимъ чрезъ ε длину дуги въ 10 секундъ, тогда будемъ имѣть (n°48)

$$\varepsilon = \frac{10\pi}{648000} = \frac{\pi}{64800},$$

и, производя дѣленіе, получимъ

$$\varepsilon = 0{,}00004\ 84813\ 68110....$$

Потомъ имѣемъ (n° 45)

$$\sin\varepsilon < \varepsilon \text{ и } \sin\varepsilon > \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{6},$$

но

$$\frac{\varepsilon^3}{6} < 0{,}00000\ 00000\ 00021;$$

слѣдовательно,

$$\sin 10'' < 0{,}00004\ 84813\ 68110,$$
$$\sin 10'' > 0{,}00004\ 84813\ 68089.$$

Эти два предѣла для $\sin 10''$ имѣютъ двѣнадцать первыхъ десятичныхъ знаковъ одинаковыхъ, такъ что мы можемъ съ точностію, по крайней мѣрѣ, до половины единицы тринадцатаго десятичнаго порядка написать

$$\sin 10'' = 0{,}00004\ 84813\ 681.$$

Вычислимъ теперь $\cos 10''$; имѣемъ (n° 47)

$$\cos\varepsilon > 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \text{ и } \cos\varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^4}{24};$$

а такъ какъ $\varepsilon < 0{,}00005$ или $< \frac{1}{2.10^4}$, то будемъ имѣть

$$\frac{\varepsilon^4}{24} < \frac{1}{384.10^{16}} < \frac{1}{3.10^{18}},$$

откуда слѣдуетъ, что $1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$ есть величина $\cos\varepsilon$, съ точностію, по крайней мѣрѣ, до половины единицы восемнадцатаго десятичнаго порядка. Ограничиваясь тринадцатью первыми десятичными знаками, получимъ,

$$\cos 10'' = 0{,}99999\ 99988\ 248.$$

50. Синусы и косинусы дугъ, возрастающихъ на 10 секундъ, начиная съ 0 до 45 градусовъ.—Если въ формулахъ

$$\sin(a+b)+\sin(a-b) = 2\cos b \sin a,$$
$$\cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos b \cos a,$$

положимъ $a=(m-1)b$, то получимъ

$$(1)\quad \begin{cases} \sin mb = 2\cos b \sin(m-1)b - \sin(m-2)b, \\ \cos mb = 2\cos b \cos(m-1)b - \cos(m-2)b. \end{cases}$$

Если примемъ $b=10''$ и положимъ $m=2$, то эти формулы дадутъ значенія $\sin 20''$ и $\cos 20''$. Вообще, если извѣстны синусы и косинусы двухъ дугъ, послѣдовательно кратныхъ относительно дуги $b=10''$, то формулы (1) дадутъ значенія синусовъ и косинусовъ слѣдующихъ кратныхъ дугъ. Но вычисленія можно сократить, поступая слѣдующимъ образомъ: постоянный множитель $2\cos 10''$ мало чѣмъ отличается отъ двухъ единицъ; полагая

$$2\cos 10'' = 2 - k,$$

будемъ имѣть

$$k = 0{,}00000\ 00023\ 504,$$

и формулы (1) примутъ видъ:

$$(2)\quad \begin{cases} [\sin mb - \sin(m-1)b] = [\sin(m-1)b - \sin(m-2)b] - k\sin(m-1)b, \\ [\cos mb - \cos(m-1)b] = [\cos(m-1)b - \cos(m-2)b] - k\cos(m-1)b. \end{cases}$$

Эти формулы (2) служатъ для вычисленія разностей

$$(3)\quad \begin{cases} \sin mb - \sin(m-1)b, \\ \cos mb - \cos(m-1)b, \end{cases}$$

посредствомъ предшествующихъ разностей

$$(4)\quad \begin{cases} \sin(m-1)b - \sin(m-2)b, \\ \cos(m-1)b - \cos(m-2)b, \end{cases}$$

предварительно вычисленныхъ, и $\sin(m-1)b$ и $\cos(m-1)b$. Прибавляя затѣмъ соотвѣтственно къ разностямъ (3) извѣстныя значенія $\sin(m-1)b$ и $\cos(m-1)b$, получимъ $\sin mb$ и $\cos mb$.

Разности (3) легко выводятся изъ вычисленныхъ разностей (4); дѣйствительно, для этого достаточно вычесть изъ этихъ послѣднихъ

соотвѣтственно произведенія $k\sin(m-1)b$ и $k\cos(m-1)b$, одинъ изъ множителей которыхъ постояненъ; эти произведенія вычисляются довольно быстро, если позаботимся составить таблицу произведеній k на девять первыхъ чиселъ.

51. Какъ бы ни были трудны вычисленія, ходъ которыхъ мы только что указали, мы видимъ, что возможно составить таблицы синусовъ и косинусовъ для всѣхъ дугъ, возрастающихъ на $10''$, начиная съ 0 до 45 градусовъ. Однако, еще слѣдуетъ разсмотрѣть, какое вліяніе на вычисленіе различныхъ синусовъ и косинусовъ окажутъ тѣ ошибки, которыхъ нельзя избѣжать во время вычисленій. Мы начали съ величинъ $\sin 10''$ и $\cos 10''$, вычисленныхъ съ точностію до половины единицы тринадцатаго десятичнаго порядка; предположимъ, что во всѣхъ послѣдующихъ вычисленіяхъ сохранимъ число μ десятичныхъ знаковъ; посмотримъ, какое значеніе слѣдуетъ дать μ, чтобы получить требуемую степень приближенія. Обозначимъ, вообще, чрезъ α_m приближенное значеніе $\sin m\,.\,10''$ или $\cos m\,.\,10''$, вычисленное съ μ десятичными знаками, а чрезъ $\alpha_m+\varepsilon_m$ точное значеніе. Принимая это во вниманіе, можемъ написать каждое изъ уравненій (1) такъ:

$$\alpha_m+\varepsilon_m=(2-k)(\alpha_{m-1}+\varepsilon_{m-1})-(\alpha_{m-2}+\varepsilon_{m-2}).$$

Если значенія α_{m-1} и α_{m-2} были вычислены съ μ десятичными знаками, то вычислимъ произведеніе $(2-k)\alpha_{m-1}$ также съ μ десятичными знаками и вычтемъ α_{m-2} изъ этого приближеннаго произведенія; разность будетъ α_m. Слѣдовательно, будемъ имѣть

$$\alpha_m=(2-k)\alpha_{m-1}-\alpha_{m-2}-\zeta_m,$$

гдѣ ζ_m обозначаетъ положительную или отрицательную ошибку, которую дѣлаемъ, подставляя вмѣсто $(2-k)\alpha_{m-1}$ приближенное значеніе этого произведенія, вычисленное съ точностью до $\frac{1}{10^{\mu}}$. Изъ двухъ предыдущихъ уравненій выводимъ

$$\varepsilon_m=(2-k)\varepsilon_{m-1}-\varepsilon_{m-2}+\zeta_m;$$

но количество $k\varepsilon_{m-1}$ очень мало по отношенію къ $2\varepsilon_{m-1}$, поэтому можно принять, что оно заключается въ ζ_m, при чемъ высшій предѣлъ этого послѣдняго количества измѣнится незначительно. Такимъ образомъ, можемъ просто написать

$$\varepsilon_m=2\varepsilon_{m-1}-\varepsilon_{m-2}+\zeta_m,$$

или

$$\varepsilon_m-\varepsilon_{m-1}=\varepsilon_{m-1}-\varepsilon_{m-2}+\zeta_m.$$

Полагая послѣдовательно $m=2,3,\ldots,m$, и замѣтивъ, что ε_0 равно нулю, потому что мы не дѣлаемъ никакой ошибки для $\sin 0$ и $\cos 0$, получимъ

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_2-\varepsilon_1)&=\varepsilon_1+\zeta_2,\\
(\varepsilon_3-\varepsilon_2)&=(\varepsilon_2-\varepsilon_1)+\zeta_3,\\
(\varepsilon_4-\varepsilon_3)&=(\varepsilon_3-\varepsilon_2)+\zeta_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(\varepsilon_m-\varepsilon_{m-1})&=(\varepsilon_{m-1}-\varepsilon_{m-2})+\zeta_m.
\end{aligned}$$

Складывая эти равенства, найдемъ

$$\varepsilon_m-\varepsilon_{m-1}=\varepsilon_1+\zeta_2+\zeta_3+\ldots+\zeta_m;$$

каждое изъ чиселъ ζ_2, ζ_3,.... по абсолютному значенію меньше $\frac{1}{10^{\mu}}$, то же самое относится и до ихъ средняго ариѳметическаго; если обозначимъ это среднее ариѳметическое чрезъ Θ_m, то предыдущее уравненіе приметъ видъ:

$$\varepsilon_m-\varepsilon_{m-1}=\varepsilon_1+(m-1)\Theta_m;$$

если m послѣдовательно дадимъ значенія $2,3,\ldots,m$, то получимъ

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2-\varepsilon_1&=\varepsilon_1+\Theta_2,\\
\varepsilon_3-\varepsilon_2&=\varepsilon_1+2\Theta_3,\\
\varepsilon_4-\varepsilon_3&=\varepsilon_1+3\Theta_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\varepsilon_m-\varepsilon_{m-1}&=\varepsilon_1+(m-1)\Theta_m,
\end{aligned}$$

и, складывая, найдемъ

$$\varepsilon_m=m\varepsilon_1+\Theta_2+2\Theta_3+3\Theta_4+\ldots+(m-1)\Theta_m.$$

Но абсолютное значеніе $\varepsilon_1 < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{13}}$, а абсолютное значеніе каждаго изъ чиселъ Θ_2, Θ_3, Θ_4,.... меньше $\frac{1}{10^{\mu}}$; кромѣ того, сумма $1+2+3+\ldots+(m-1)$ равна $\frac{m(m-1)}{2}$; почему, если не обращать вниманія на знакъ числа ε_m, получимъ

$$\varepsilon_m < \frac{m}{2 \cdot 10^{13}} + \frac{m(m-1)}{2 \cdot 10^{\mu}}.$$

Послѣ этого постараемся опредѣлить, какова можетъ быть ошибка для синуса и косинуса дуги въ 45°, опредѣленіе которыхъ заканчиваетъ рядъ вычисленій. Такъ какъ дуга въ 45° содержитъ въ себѣ 16200 разъ дугу въ 10 секундъ, то положимъ $m=16200$; предыдущее неравенство приметъ видъ:

$$\varepsilon_{16200} < \frac{16200}{2 \cdot 10^{13}} + \frac{16200 \times 16199}{2 \times 10^{\mu}},$$

а тѣмъ болѣе будемъ имѣть

$$\varepsilon_{16200} < \frac{1}{10^9} + \frac{1{,}5}{10^{\mu-8}}.$$

Если примемъ $\mu=17$, то вторая дробь будетъ равна $\frac{1{,}5}{10^9}$, и тогда будемъ имѣть

$$\varepsilon_{16200} < \frac{2{,}5}{10^9} \text{ или } \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10^8};$$

такимъ образомъ, ошибка при вычисленіи $sin\,45°$ или $cos\,45°$ будетъ меньше четверти единицы восьмого десятичнаго порядка.

Изъ этого слѣдуетъ, что, начиная съ $sin\,10''$ и $cos\,10''$, полученныхъ съ точностію до половины единицы тринадцатаго десятичнаго порядка, и вычисляя съ 17 десятичными знаками синусы и косинусы, слѣдующихъ дугъ, можно быть увѣреннымъ, вплоть до самаго конца таблицы, въ точности первыхъ восьми десятичныхъ знаковъ.

52. Но когда приходится выполнять такъ много вычисленій, то необходимо подвергнуть повѣркѣ получаемые результаты. Слѣдуетъ также, раньше начала вычисленій, непосредственно вычислить синусы и косинусы нѣкотораго числа дугъ, для того чтобы впо-

слѣдствіи имѣть достаточное число членовъ для сравненія; напр., мы дали (n°37 и 38) выраженія для синусовъ и косинусовъ дугъ, кратныхъ $\frac{\pi}{60}$, т.-е. для дугъ отъ 3 до 3 градусовъ; было бы полезно вычислить эти синусы и эти косинусы съ достаточнымъ числомъ десятичныхъ знаковъ; если промежутокъ въ 3° покажется слишкомъ большимъ, то можно уменьшить его на половину или въ четыре раза, пользуясь формулами

$$sin\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1-cos\,a}{2}}, \quad cos\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1+cos\,a}{2}},$$

а также и тѣми, которыя относятся до сложенія и умноженія дугъ; очень легко также составить весьма точную предварительную таблицу, содержащаю синусы и косинусы дугъ, кратныхъ 45 минутъ или 2700 секундъ. Эта первая таблица будетъ имѣть не только то преимущество, что доставитъ средства для повѣрки, но она также дастъ возможность достигнуть съ большею точностію вычисленій, относящихся до таблицы, ибо синусы и косинусы дугъ отъ 2700 до 2700 секундъ могутъ быть вычислены съ требуемою степенью точности.

Наконецъ, когда таблица уже составлена, то ее можно повѣрить столькими способами, сколькими пожелаемъ при посредствѣ тождественной формулы

$$sin(90°-x)+sin(18°-x)+sin(18°+x) = \\ = sin(54°-x)+sin(54°+x),$$

выведенной въ n° 40, и другихъ формулъ того же рода.

Хотя мы и можемъ составить всю таблицу по способу указанному въ n° 50, однако слѣдуетъ остановиться, лишь только достигнемъ дуги въ 30°. Дѣйствительно, когда вычислимъ синусы и косинусы дугъ, возрастающихъ на 10 секундъ, начиная съ 0° до 30°, то можемъ получить синусы и косинусы дугъ, заключающихся между 30° и 45°, посредствомъ простого вычитанія.

Въ самомъ дѣлѣ, припомнивъ, что $sin\,30° = \frac{1}{2}$, найдемъ (n°18):

$$sin(30°+x)+sin(30°-x)=cosx,$$
$$cos(30°-x)-cos(30°+x)=sinx,$$

откуда получимъ

$$sin(30°+x)=cosx-sin(30°-x),$$
$$cos(30°+x)=cos(30°-x)-sinx;$$

эти формулы даютъ возможность получить, при помощи очень легкаго вычисленія, синусы и косинусы дугъ, большихъ 30 градусовъ, когда извѣстны синусы и косинусы дугъ, меньшихъ 30 градусовъ, такъ что пользованіе ими значительно облегчаетъ трудъ составленія таблицы.

Изложенный нами способъ есть тотъ, который употребляли ученые, которымъ мы обязаны построеніемъ первой таблицы синусовъ и косинусовъ. Впослѣдствіи анализъ доставилъ другіе болѣе простые пріемы для болѣе скораго достиженія этой цѣли; эти пріемы состоятъ въ употребленіи *разностей* и они основываются на формулахъ, которыя выражаютъ синусы и косинусы въ функціи дуги. Мы выведемъ эти формулы въ главѣ V.

Таблицы логариѳмовъ круговыхъ функцій.

53. Въ численныхъ приложеніяхъ постоянно прибѣгаютъ къ помощи логариѳмовъ, почему болѣе важно знать логариѳмы синусовъ, косинусовъ и проч., чѣмъ самыя тригонометрическія линіи. Но когда синусы и косинусы дугъ, отъ 10 до 10 секундъ, вычислены, то легко составить и таблицу ихъ логариѳмовъ. Составивъ такую таблицу, мы можемъ составить таблицу логариѳмовъ, тангенсовъ и котангенсовъ, пользуясь формулами

$$logtangx=logsinx-logcosx,$$
$$logcotx=logcosx-logsinx.$$

Что же касается до секансовъ и косекансовъ, то ихъ совсѣмъ не употребляютъ; логариѳмы ихъ равны логориѳмамъ синусовъ и косинусовъ, но только съ обратными знаками *).

Самыя употребительныя тригонометрическія таблицы синусовъ, косинусовъ и проч., это таблицы Каллета. Ниже покажемъ расположеніе и употребленіе этихъ таблицъ, но раньше мы должны сдѣлать весьма важное замѣчаніе.

*) Въ V главѣ даны формулы, при помощи которыхъ можно вычислять непосредственно и при томъ съ какой угодно степенью точности логариѳмы инусовъ, косинусовъ, тангенсовъ и котангенсовъ всѣхъ дугъ.

Синусы и косинусы дугъ отъ нуля до 90 градусовъ, тангенсы дугъ отъ нуля до 45 градусовъ и котангенсы дугъ отъ 45 до 90 градусовъ меньше 1, почему логариѳмы ихъ числа отрицательныя. Во избѣжаніе употребленія отрицательныхъ характеристикъ, въ таблицахъ Каллета прибавлено по 10 единицъ ко всѣмъ отрицательнымъ логариѳмамъ; такимъ образомъ при вычисленіяхъ всегда надо заботиться объ уничтоженіи этихъ 10 единицъ.

Расположеніе таблицъ Каллета.

54. Первая изъ этихъ таблицъ содержитъ логариѳмы синусовъ и тангенсовъ дугъ, возрастающихъ на одну секунду, для первыхъ пяти градусовъ, съ семью десятичными знаками; а такъ какъ синусъ или тангенсъ дуги есть косинусъ или котангенсъ ея дополненія, то, слѣдовательно, эта таблица даетъ также логариѳмы косинусовъ и котангенсовъ дугъ выше 85 градусовъ.

Градусы означены, внѣ рамки, вверху и внизу на каждой страницѣ; минуты занимаютъ первую и послѣднюю строки, а секунды первый и послѣдній столбцы. На каждой лѣвой страницѣ находятся только логариѳмы синусовъ и косинусовъ, а на каждой правой страницѣ расположены логариѳмы тангенсовъ и котангенсовъ, какъ это видно изъ заглавій этихъ страницъ.

Слѣдующія таблицы содержатъ логариѳмы синусовъ, косинусовъ, тангенсовъ и котангенсовъ, отъ 10 до 10 секундъ, для всѣхъ градусовъ первой четверти окружности. Въ ней градусы обозначены, внѣ рамки, вверху и внизу каждой страницы. Минуты и секунды, находящіяся въ первомъ и во второмъ столбцѣ, относятся къ градусамъ, которые обозначены вверху; минуты и секунды, которые помѣщены въ послѣднемъ и предпослѣднемъ столбцѣ, относятся къ градусамъ, обозначеннымъ внизу страницы.

Третій столбецъ содержитъ логариѳмы синусовъ дугъ, которыхъ градусы обозначены вверху страницы и которыхъ минуты и секунды помѣщены въ первомъ и второмъ столбцѣ. Третій столбецъ озаглавленъ *sinus*, но надо читать *логариѳмы синусовъ*. То же самое отно-

сится и до другихъ. Четвертый столбецъ содержитъ разности логариѳмовъ синусовъ, какъ это указываетъ его надпись; каждое число этого столбца находится не на продолженіи чиселъ предыдущаго столбца, но находится на полстроки ниже и каждое изъ нихъ выражаетъ разность двухъ логариѳмовъ, между которыми оно находится. Пятый и шестой столбцы содержатъ логариѳмы косинусовъ тѣхъ же дугъ и ихъ разности; седьмой и восьмой столбцы содержатъ логариѳмы тангенсовъ и ихъ разности, наконецъ девятый столбецъ содержитъ логариѳмы котангенсовъ тѣхъ же дугъ; ихъ разности тѣ же, что и разности логариѳмовъ тангенсовъ *); поэтому то въ заголовкѣ столбца, содержащаго эти разности, находится надпись *différences communes*.

Если разсматривать только градусы, обозначенные вверху каждой страницы, то можетъ показаться, что таблицы простираются только до 45 градусовъ, но если обратить вниманіе на то, что каждый столбецъ имѣетъ два заглавія, что столбецъ, вверху котораго написано *sinus*, внизу имѣетъ надпись *cosinus*; что столбецъ, имѣющій заглавіе вверху *cosinus* внизу озаглавленъ *sinus* и, что то же самое мы видимъ относительно тангенсовъ и котангенсовъ, то обративъ вниманіе на градусы, равно какъ и на названія столбцовъ, которыя находятся внизу каждой страницы и на два послѣднихъ столбца справа тѣхъ же страницъ, заключаемъ, что даны и логариѳмы синусовъ, косинусовъ, тангенсовъ и котангенсовъ, для градусовъ, минутъ и секундъ отъ 45 градусовъ до 90 градусовъ.

Употребленіе таблицъ.

55. Задача. I.—*По числу градусовъ, минутъ и секундъ дуги, меньшей* 90 *градусовъ, найти логариѳмъ синуса, косинуса, тангенса или котангенса этой дуги.*

Первый случай. — Если данное число состоитъ изъ градусовъ, минутъ и десятковъ секундъ, то ищемъ сначала число градусовъ

*) Такъ какъ имѣемъ

$$\frac{tang(x+h)}{tang\,x} = \frac{cot\,x}{cot(x+h)},$$

и, логариѳмируя,

$$log\,tang(x+h) - log\,tang\,x = log\,cot\,x - log\,cot(x+h).$$

между числами, которыя означены вверху или внизу страницъ; вверху, если дуга меньше 45°, а внизу, если она больше. Далѣе, если дуга менѣе 45°, то слѣдимъ за числами перваго столбца, которыя идутъ, возрастая сверху внизъ; если же дуга болѣе 45°, то — за числами послѣдняго столбца, которыя идутъ, возрастая снизу вверхъ. Слѣдимъ, я говорю, за числами того или другого изъ этихъ столбцовъ въ томъ направленіи, въ которомъ они возрастаютъ и только до тѣхъ поръ, пока не встрѣтимъ данное число минутъ. Слѣдуя той линіи, въ которой находится найденное число минутъ, переходимъ къ столбцу, содержащему секунды; слѣдя въ томъ же направленіи за числами этого столбца, найдемъ данное число десятковъ секундъ и на линіи, на которой находится послѣднее число, найдемъ искомые логариѳмы синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

Положимъ, напримѣръ, что хотятъ найти логариѳмъ тангенса 79° 51′ 40″; такъ какъ 79 градусовъ находятся внизу страницы, то должно слѣдить за числами послѣдняго столбца, которыя возрастаютъ снизу вверхъ; въ этомъ столбцѣ найдемъ 51 минуту; затѣмъ переходимъ въ предыдущій столбецъ съ десятками секундъ; въ томъ же направленіи въ этомъ столбцѣ найдемъ 40 секундъ; въ этой же строкѣ и въ столбцѣ, озаглавленномъ снизу *tangens*, найдемъ 0,7475657. Это будетъ искомый логариѳмъ. Такимъ образомъ имѣемъ

$$log\,tang(79°\,51'\,40'') = 0{,}7475657.$$

Второй примѣръ: требуется найти логариѳмъ синуса 2°24′50″. Такъ какъ 2 градуса находятся вверху страницы, то спускаемся сверху внизъ въ первомъ столбцѣ, числа котораго идутъ, возрастая сверху внизъ; въ этомъ столбцѣ находимъ 24 минуты; затѣмъ переходимъ въ слѣдующій столбецъ, въ которомъ содержатся десятки секундъ; спускаясь вдоль этого столбца, находимъ въ немъ 50 секундъ; въ той же строкѣ, въ столбцѣ, озаглавленномъ сверху *sinus*, найдемъ 8,6244662. Это будетъ искомый логариѳмъ, увеличенный десятью единицами. Такимъ образомъ получимъ

$$log\,sin(2°\,24'50'') = \bar{2}{,}6244662.$$

Второй случай. — Если данное число содержитъ кромѣ единицъ секундъ еще и дробныя части секунды, то начинаютъ съ превращенія дробей въ десятичныя; затѣмъ ищутъ, какъ мы только что

показали, логариѳмъ синуса или тангенса дуги, получаемой изъ данной, если въ послѣдней отбросить единицы и десятичныя доли секунды, совокупность которыхъ обозначимъ чрезъ h. Потомъ берутъ разность Δ, существующую между найденнымъ логариѳмомъ и логариѳмомъ, непосредственно слѣдующимъ за нимъ, считая сверху внизъ или снизу вверхъ, сообразно направленію, въ которомъ идутъ; наконецъ, прибавляютъ къ найденному логариѳму число Δ', опредѣляемое изъ уравненія

$$\frac{h}{10} = \frac{\Delta'}{\Delta}, \text{ откуда } \Delta' = \frac{h\Delta}{10},$$

и, такимъ образомъ, получаютъ искомый логариѳмъ. Здѣсь Δ' и Δ выражаютъ единицы седьмого десятичнаго порядка, поэтому берутъ для Δ' цѣлую часть произведенія $\frac{\Delta}{10} \times h$; но при этомъ согласились увеличивать единицею цѣлую часть, если дробь, которую отбрасываютъ, больше 0,5.

Если хотятъ найти логариѳмъ косинуса или котангенса данной дуги, то увеличиваютъ десятью единицами число секундъ данной дуги и, отбросивъ единицы и дробныя части секунды, получаютъ дугу, которая будетъ превышать данную дугу на нѣкоторое число h секундъ; затѣмъ ищутъ логариѳмъ ея косинуса или ея котангенса и прибавляютъ къ результату $\frac{h\Delta}{10}$, гдѣ Δ обозначаетъ разность, между найденнымъ логариѳмомъ и непосредственно ему предшествующимъ, считая сверху внизъ или снизу вверхъ, сообразно направленію, въ которомъ идутъ.

Правило, которое мы только что изложили, основывается на слѣдующемъ принципѣ:

Если даны два какія нибудь послѣдовательныя малыя приращенія дуги, то приращенія, соотвѣтствующія log sin или log cos и т. д., почти пропорціональны приращеніямъ дуги.

Этотъ принципъ не совсѣмъ точенъ, но, примѣняя его, мы получаемъ достаточное приближеніе, исключая тѣхъ случаевъ, которые мы разсмотримъ ниже. Можно его провѣрить при посредствѣ самихъ таблицъ; дѣйствительно, можно убѣдиться, что, исключая начала таблицъ, на довольно большомъ протяженіи разности *log sin*, или *log cos*, или и т. д. почти постоянны; отсюда слѣдуетъ, что

для равныхъ приращеній данной дуги логариѳмъ синуса или косинуса, и т. д. этой дуги принимаетъ почти равныя приращенія.

Мы покажемъ на примѣрахъ образецъ вычисленія.

1° *Найти логариѳмъ sin*(49°53′24″,3).

Log sin(49°53′20″)		$\overline{1}$,8835459	Δ=177
Для	4″,3	76	17,7×4,3=76,11
Log sin (49°53′24″, 3)		$\overline{1}$,8835535	

2° *Найти логариѳмъ cos*(36°35′36″,3).

Log cos(36°35′40″)		$\overline{1}$,9046481	Δ=156
Для	3″,7	58	15,6×3,7=57,72
Log cos (36°35′36″,3)		$\overline{1}$,9046539	

3° *Найти логариѳмъ tang*(79°51′47″,2).

Logtang(79°51′40″)		=0,7475657	Δ=1215
Для	7″,2	875	121,5×7,2=874,80
Logtang(79°51′47″,2)		=0,7476532	

4° *Найти логариѳмъ cot*(23°17′22″,3).

Log cot(23°17′30″)		=0,3660313	Δ=580
Для	7″.7	447	58×7,7=446,60
Log cot(23°17′22″,3)		=0,3660760	

Третій случай.—Если разности, которыя мы находимъ въ таблицахъ, измѣняются быстро, что случается, когда данная дуга очень мала, то предыдущій методъ уже не представляетъ достаточной точности; вотъ какимъ образомъ слѣдуетъ тогда поступать. Если данная дуга выражена въ секундахъ и десятичныхъ доляхъ секунды, то пусть a будетъ цѣлая часть и h десятичная дробь; чтобы получить $log\,sin\,(a+h)$ и $log\,tang\,(a+h)$, можно допустить, что отношеніе между очень малыми дугами a и $a+h$ равно отношенію синусовъ и тангенсовъ этихъ дугъ; поэтому, полагая

$$\frac{sin\,(a+h)}{sin\,a} = \frac{a+h}{a}, \quad \frac{tang(a+h)}{tang\,a} = \frac{a+h}{a},$$

*

получимъ

$$log\ sin\ (a+h)=log\ sin\ a+log(a+h)-log\ a,$$
$$log\ tang(a+h)=log\ tang\ a+log(a+h)-log\ a.$$

Беря $log\ sin\ a$ или $log\ tang\ a$ въ первой части тригонометрическихъ таблицъ, $log(a+h)$ и $log\ a$ въ таблицахъ логариѳмовъ чиселъ, мы будемъ имѣть изъ двухъ предыдущихъ формулъ $log\ sin(a+h)$ и $log\ tang(a+h)$.

Положимъ, хотятъ, напримѣръ, найти логариѳмъ синуса 0°3′27″,355; эта дуга, обращенная въ секунды, равна 207″,355, почему $a=207$, $h=0,355$. Логариѳмъ $sin(3'27'')$ равенъ $\overline{3},0015451$, логариѳмъ 207,355 равенъ 2,3167145, а логариѳмъ 207, взятый со знакомъ —, равенъ $\overline{3},6840297$; складывая эти три логариѳма, получимъ

$$log\ sin\ (0°3'27'',355)=\overline{3},0022893.$$

Если требуется найти логариѳмъ котангенса очень малой дуги, то надо искать логариѳмъ тангенса, какъ было показано выше, а затѣмъ перемѣнить знакъ этого логариѳма.

Если требуется найти $log\ cos$ очень малой дуги $a+h$, то имѣемъ формулу

$$log\ cos\ (a+h)=log\ sin(a+h)-log\ tang(a+h),$$

изъ которой, опредѣливъ, какъ было нами выше указано, $log\ sin(a+h)$ и $log\ tang(a+h)$, имѣемъ $log\ cos(a+h)$. Но эта формула, въ силу вышеприведенныхъ равенствъ, приметъ видъ:

$$log\ cos\ (a+h)=log\ sin\ a-log\ tang\ a=log\ cos\ a,$$

откуда слѣдуетъ, что логариѳмы косинусовъ дугъ $a+h$ и a почти равны; это, впрочемъ, показываютъ и таблицы. Предположимъ, что требуется найти $log\ cos$ 0°3′27″,355; эта дуга заключается между 3′20″ и 3′30″ дугами, косинусы которыхъ имѣютъ одинъ и тотъ же логариѳмъ $\overline{1},9999998$, почему

$$log\ cos\ (0°3'27'',355)=\overline{1},9999998.$$

56. Задача II. По данному логариѳму синуса, косинуса, тангенса и котангенса найти число градусовъ, минутъ и секундъ, содержащихся въ дугѣ, которой соотвѣтствуетъ данный логариѳмъ.

Первый случай.—Ищемъ данный логариѳмъ въ какомъ нибудь изъ двухъ столбцовъ, въ заголовкѣ которыхъ находится названіе той тригонометрической линіи, численному значенію которой принадлежитъ данный логариѳмъ. Если его находятъ между тѣми, которые она заключаетъ, то замѣчаютъ, на какомъ концѣ столбца находится заголовокъ, служившій намъ указаніемъ: если этотъ заголовокъ находится вверху, то смотрятъ на второй столбецъ слѣва и въ той же строкѣ, что и логариѳмъ, находятъ число десятковъ, которое будетъ выражать секунды искомой дуги. Потомъ переходятъ къ первому столбцу; если тамъ, на продолженіи той же строки, находится какое нибудь число, то это будетъ числомъ искомыхъ минутъ, если же нѣтъ, то идутъ вверхъ вдоль этого столбца и первое число, которое встрѣтятъ, будетъ числомъ минутъ; наконецъ, вверху страницы находятъ внѣ рамки искомое число градусовъ. Но если заголовокъ, о которомъ рѣчь, находится внизу, должно обратиться къ предпослѣднему столбцу справа, который точно такимъ же образомъ укажетъ число секундъ; затѣмъ должно перейти къ послѣднему столбцу, въ которомъ находятъ искомыя минуты, или въ той же строкѣ, или идя внизъ вдоль этого столбца. Наконецъ, внизу страницы и внѣ рамки находятъ искомое число градусовъ.

Положимъ, напримѣръ, хотятъ найти число градусовъ, минутъ и секундъ дуги, логариѳмъ синуса которой равенъ $\overline{1},3541803$; ищутъ этотъ логариѳмъ въ одномъ изъ двухъ столбцовъ, озаглавленныхъ *sinus*, не обращая вниманія на то, находится ли этотъ заголовокъ вверху или внизу столбца; найдя его, замѣчаютъ, что заголовокъ *sinus* находится вверху столбца: затѣмъ обращаются къ второму столбцу слѣва и находятъ 50 на продолженіи линіи, заключающей число 9,3541803; далѣе переходятъ къ первому столбцу, но тамъ не находятъ ничего на продолженіи той же линіи, но, поднимаясь вверхъ, встрѣчаютъ въ этомъ столбцѣ 3; наконецъ, вверху страницы внѣ рамки находятъ 13 градусовъ. Такимъ образомъ, искомое число будетъ 13°3′50″.

Второй случай.—Если данный логариѳмъ не находится въ таблицахъ, что является случаемъ болѣе обыкновеннымъ, то ищутъ два логариѳма, между которыми данный логариѳмъ заключается; берутъ тотъ изъ этихъ двухъ логариѳмовъ, который находится въ сторонѣ, обращенной къ заголовку столбца искомой тригонометрической линіи; вычитаютъ его изъ даннаго логариѳма или же вычи-

таютъ изъ него данный логариѳмъ, смотря по тому, который изъ нихъ больше и который меньше; получатъ такимъ образомъ разность Δ' и, обозначая чрезъ Δ *табличную* разность двухъ логариѳмовъ, между которыми заглючается данный логариѳмъ, опредѣлятъ число h изъ уравненія

$$\frac{\Delta'}{\Delta}=\frac{h}{10}, \quad \text{откуда} \quad h=\frac{10\Delta'}{\Delta}.$$

Число h, меньшее 10, будетъ выражать единицы секундъ и дробныя части секунды искомой дуги. Что же касается градусовъ, минутъ и десятковъ секундъ, то ихъ получатъ, подставляя вмѣсто даннаго логариѳма логариѳмъ, находящійся въ таблицахъ и разнящійся отъ даннаго на Δ', и затѣмъ поступая, какъ показано въ предыдущемъ случаѣ.

Мы покажемъ на примѣрахъ образецъ вычисленія.

1° *Найти дугу, которой log sin равенъ* $\bar{1}$,8835535.

Log sin $x=\bar{1}$,8835535			
Для	1,8835459	49°53′20″	$\Delta=177$
$\Delta'\times 10$	760	4″,29	
		$x=49°53'24'',29$	

2° *Найти дугу, которой log cos равенъ* $\bar{1}$,9046539.

Log cos $x=\bar{1}$,9046539			
Для	$\bar{1}$,9046637	36°35′30″	$\Delta=156$
$\Delta'\times 10$	980	6″,3	
		$x=36°35'36'',3$	

3° *Найти дугу, которой log tang равенъ* 0,7476532.

Log tang $x=0,7476532$			
Для	0,7475657	79°51′40″	$\Delta=1215$
$\Delta'\times 10$	8750	7″,2	
		$x=79°51'47'',2$	

4° *Найти дугу, которой log cot равенъ* 0,3660760.

Log cot $x=0,3660760$			
Для	0,3660892	23°17′20″	$\Delta=580$
$\Delta'\times 10$	1320	2″,28	
		$x=23°17'22'',28$	

Третій случай.—Если разности въ таблицахъ измѣняются слишкомъ быстро, то вышеприведенный ходъ вычисленія непримѣнимъ. Случай, о которомъ идетъ рѣчь, встрѣчается, когда требуется опредѣлить очень малую дугу по логариѳму ея синуса или логариѳму ея тангенса; вотъ какъ слѣдуетъ тогда поступать. Въ первой части таблицъ ищутъ логариѳмъ, который ближе всего подходитъ къ данному логариѳму, и затѣмъ обращаютъ въ секунды число градусовъ и минутъ соотвѣтствующей дуги; обозначая чрезъ a число такимъ образомъ полученныхъ секундъ и чрезъ $a+h$ точное число секундъ, заключающихся въ неизвѣстной дугѣ, опредѣляютъ $a+h$ изъ одного изъ двухъ слѣдующихъ равенствъ:

$$log(a+h)=log\,sin(a+h)-log\,sin\,a+log\,a,$$
$$log(a+h)=log\,tang(a+h)-log\,tang\,a+log\,a,$$

о которыхъ мы уже упоминали въ задачѣ, обратной нынѣ разсматриваемой нами.

Положимъ, желаютъ, напримѣръ, найти число градусовъ, минутъ и пр., заключающихся въ дугѣ, логариѳмъ синуса которой равенъ $\bar{3}$,0022893; находятъ, что табличный логариѳмъ, который ближе всего подходитъ къ этому логариѳму, есть $\bar{3}$,0015451 или—2,9984549 и этотъ логариѳмъ соотвѣтствуетъ дугѣ 0°3′27″ или 207 секундамъ; логариѳмъ 207 есть 2,3159703; складывая три числа $\bar{3}$,0022893, 2,9984449, 2,3159703, получимъ сумму 2,3167145. Этотъ логариѳмъ соотвѣтствуетъ числу 207,355; такимъ образомъ, искомая дуга будетъ 207″,355 или 0°3′27″,355.

Точно такъ же поступаютъ, если желаютъ опредѣлить очень малую дугу, когда данъ логариѳмъ ея котангенса, такъ какъ этотъ логариѳмъ равенъ логариѳму тангенса, взятому съ обратнымъ знакомъ.

Но когда требуется опредѣлить очень малую дугу при по-

мощи логариѳма ея косинуса, то этого нельзя сдѣлать достаточно точно. Положимъ, желаютъ, напримѣръ, найти дугу, которой косинусъ имѣетъ логариѳмомъ $\overline{1},9999991$; таблицы указываютъ, что этотъ логариѳмъ соотвѣтствуетъ всякой дугѣ, заключающейся между $6'45''$ и $7'25''$; такимъ образомъ, искомая дуга можетъ быть опредѣлена лишь съ точностью до 40 секундъ.

57. Рѣшеніе двухъ задачъ, которыми мы только что занимались, основывается на приближенномъ равенствѣ:

$$(1) \qquad \frac{h}{10} = \frac{\Delta'}{\Delta}.$$

Положимъ, что

$$(2) \qquad \Delta' = \frac{h\Delta}{10} \pm e, \quad h = \frac{10\Delta'}{\Delta} \pm \varepsilon,$$

гдѣ e и ε будутъ выражать ошибки, совершенныя нами, при примѣненіи формулы (1) для вычисленія Δ' (первая задача) и для вычисленія h (вторая задача). Можно доказать при помощи соображеній, которыя здѣсь не могутъ быть приведены, что e всегда меньше единицы седьмого десятичнаго порядка, если дуга, логариѳмъ синуса или логариѳмъ тангенса которой желаютъ опредѣлить, превышаетъ нѣкоторый предѣлъ, меньшій 5 градусовъ, и что, слѣдовательно, то же самое будемъ имѣть, если дуга, логариѳмъ косинуса или логариѳмъ котангенса которой желаютъ опредѣлить, больше 85°. Такимъ образомъ, употребленіе формулы (1) въ этихъ предѣлахъ вполнѣ допустимо при рѣшеніи второго случая первой задачи. Точно также можно доказать, что ошибка ε, дѣлаемая при рѣшеніи второй задачи, меньше одной сотой части секунды, если дуга, которую желаютъ вычислить, разнится отъ 0 или отъ 90 градусовъ на количество, большее нѣкотораго предѣла меньшаго, чѣмъ $1\frac{1}{2}$ градуса, и что эта ошибка ε становится совершенно незначительной, если дуга, которую желаютъ вычислить, будетъ отличаться на нѣсколько градусовъ отъ своихъ предѣловъ 0 и 90 градусовъ; откуда слѣдуетъ, что употребленіе формулы

$$h = \frac{10\Delta'}{\Delta},$$

при рѣшеніи второго случая второй задачи между предѣлами, которые мы выше привели, вполнѣ законно *).

Но ошибка, которую мы дѣлаемъ при вычисленіи h, происходитъ не отъ одного только количества ε, которымъ пренебрегаютъ; логариѳмы, разности которыхъ выражаются чрезъ Δ и Δ', то же заключаютъ въ себѣ нѣкоторую ошибку; и хотя эта ошибка меньше половины единицы седьмого десятичнаго порядка для логариѳмовъ таблицы, но она можетъ быть гораздо больше для даннаго логариѳма, который чаще всего является результатомъ дѣйствій, произведенныхъ надъ числами, извѣстными только приблизительно. Допуская, напримѣръ, что ошибка Δ' равна единицѣ порядка послѣдней ея цифры, ошибка въ h, если пренебрежемъ ошибкою въ Δ, будетъ равна $\frac{1}{\Delta}\,10''$, откуда слѣдуетъ, что точность, получаемая при вычисленіи дуги, будетъ тѣмъ больше, чѣмъ табличныя разности будутъ сами по себѣ больше. Но разность двухъ $log\,tang$ есть сумма разностей

*) Если мы обозначимъ чрезъ M модуль обыкновенныхъ логариѳмовъ и чрезъ Θ число, заключающееся между нулемъ и 1, то, принимая секунду за единицу, по извѣстной формулѣ (Тэйлора) будемъ имѣть:

$$log\sin(x+h) - log\sin x = Mh\sin 1'' \frac{\cos x}{\sin x} - M\frac{\Theta h^2 \sin^2 1''}{2\sin^2 x}.$$

Обозначимъ чрезъ Δ значеніе первой части равенства при $h=10$ и чрезъ Δ' значеніе этой же первой части при $h<10$; обозначимъ чрезъ ϑ значеніе, которое принимаетъ Θ при $h=10$, и положимъ, что

$$\Delta' = \frac{h\Delta}{10} \pm e, \; h = \frac{10\Delta'}{\Delta} \pm \varepsilon;$$

изъ предыдущей формулы получимъ

$$\pm e = \frac{M\sin^2 1''}{2\sin^2 x}(10\vartheta h - \Theta h^3), \quad \pm\varepsilon = \frac{(10\vartheta - \Theta h)h\sin 1''}{\sin 2x - \Theta h \sin 1''};$$

но такъ какъ h меньше 10, то абсолютное значеніе $10\vartheta - \Theta h$ также меньше 10; такимъ образомъ найдемъ

$$e < \frac{50M\sin^2 1''}{\sin^2 x}, \quad \varepsilon < \frac{100\sin 1''}{\sin 2x - 10\sin 1''}.$$

На основаніи этихъ результатовъ можно показать, что наши замѣчанія справедливы для $log\sin$ и $log\cos$; а затѣмъ немедленно убѣдимся въ справедливости ихъ и по отношенію къ $log\,tang$.

соотвѣтственныхъ *log sin* и *log cos* *); слѣдовательно, дуга всегда съ большею точностью опредѣляется по своему тангенсу, чѣмъ по своему синусу или косинусу. При 45 градусахъ, въ точкѣ перваго квадранта, гдѣ тангенсъ даетъ наименьшую точность, табличная разность его логариѳмовъ составляетъ 421 единицу седьмого десятичнаго порядка для измѣненій дуги въ 10 секундъ; откуда заключаемъ, что ошибка на одну единицу седьмого десятичнаго порядка въ логариѳмѣ тангенса соотвѣтствуетъ ошибкѣ на $0''{,}024$ въ дугѣ. Та же самая ошибка въ логариѳмѣ синуса или косинуса отвѣчала бы удвоенной ошибкѣ, т. е. $0''{,}048$. Для малыхъ дугъ, разности логариѳмовъ косинуса очень малы и, слѣдовательно, разности логариѳмовъ синусовъ почти равны разностямъ логариѳмовъ тангенсовъ; отсюда слѣдуетъ, что малая дуга не можетъ быть опредѣлена съ достаточною точностью по своему косинусу, какъ объ этомъ было уже сказано выше; напротивъ, она одинаково съ достаточной точностью можетъ быть опредѣлена по своему синусу или по своему тангенсу. Изъ этого заключаемъ, что при тригонометрическихъ рѣшеніяхъ должно стараться пользоваться тангенсами и избѣгать употребленія косинусовъ при опредѣленіи небольшихъ дугъ.

Приведеніе формулъ къ виду, удобному для логариѳмированія.

58. Для того, чтобы можно было непосредственно примѣнить вычисленіе посредствомъ таблицъ логариѳмовъ къ опредѣленію значенія какого нибудь численнаго выраженія, необходимо, чтобы это выраженіе состояло только изъ одночленныхъ сомножителей; въ противномъ случаѣ говорятъ, что это выраженіе *неудобно для логариѳмированія*. Если выраженіе не содержитъ другихъ многочленныхъ сомножителей, кромѣ суммъ или разностей двухъ синусовъ, или двухъ косинусовъ, или двухъ тангенсовъ данныхъ дугъ, то его можно

*) Разность

$$\log tang(x+h) - \log tang\, x$$

есть, очевидно, сумма двухъ разностей

$$\log sin(x+h) - \log sin\, x,$$
$$\log cos\, x - \log cos(x+h).$$

преобразовать въ выраженіе удобное для логариѳмированія, пользуясь формулами n° 18, почему эти формулы и очень важны. Но существуютъ общіе способы, которые мы сейчасъ покажемъ, для преобразованія выраженія, неудобнаго для логариѳмированія, въ выраженіе, удобное для логариѳмированія.

Разсмотримъ сначала двучленное выраженіе

$$x = a \pm b,$$

и предположимъ, что хотятъ найти $\log x$; здѣсь a и b суть числа положительныя, которыхъ даны одни только логариѳмы. Можно написать его такъ

$$x = a\left(1 \pm \frac{b}{a}\right).$$

Послѣ этого, опредѣляемъ вспомогательную дугу φ, такую, чтобы

$$tang\,\varphi = \frac{b}{a};$$

эта дуга φ, заключающаяся между нулемъ и 90 градусами, можетъ быть вычислена по формулѣ

$$\log tang\,\varphi = \log b - \log a.$$

Тогда выраженіе для x приметъ видъ

$$x = a(1 \pm tang\,\varphi) = a\,\frac{cos\,\varphi \pm sin\,\varphi}{cos\,\varphi};$$

но мы имѣемъ

$$cos\,\varphi \pm sin\,\varphi = cos\,\varphi \pm cos(90° - \varphi),$$
$$= 2\,cos 45°\,cos(\varphi \mp 45°) = \sqrt{2}\,cos(\varphi \mp 45°);$$

слѣдовательно,

$$x = \frac{a\sqrt{2}\,cos(\varphi \mp 45°)}{cos\,\varphi}.$$

Эта послѣдняя формула удобна для логариѳмированія; получимъ

$$\log x = \log a + \tfrac{1}{2}\log 2 + \log cos(\varphi \mp 45°) - \log cos\,\varphi \;\text{*}).$$

*) Логариѳмы, входящіе въ формулу со знакомъ —, слѣдуетъ преобразовать такъ, чтобы ихъ десятичная часть была отрицательною; напр., если логариѳмъ $\overline{3}{,}3554207$ надо вычесть изъ суммы другихъ логариѳмовъ, то его должно написать такъ:—2,6445793, и вопросъ сведется къ прибавленію 2,6445793. Что же касается до упомянутаго преобразованія, то оно производится слѣдующимъ образомъ: берутъ дополненіе даннаго логариѳма до 10 и вычитаютъ затѣмъ изъ характеристики 10.

Тотъ же самый способъ прилагается ко всякому многочленному выраженію $a \pm b \pm c \pm d \ldots$; въ самомъ дѣлѣ, употребляя вспомогательную дугу, можно уменьшить на единицу число членовъ многочленнаго выраженія; при помощи второй вспомогательной дуги уменьшать еще на единицу это число членовъ и, такимъ образомъ, можно продолжать до тѣхъ поръ, пока выраженіе не будетъ преобразовано въ одночленъ.

Предыдущее преобразованіе не составляетъ единственнаго, которымъ можно пользоваться; мы покажемъ еще слѣдующее.

Формулу $a+b$, гдѣ a и b—числа положительныя, преобразуемъ въ удобную для логариѳмированія, полагая $\frac{b}{a}=tang^2\varphi$; такъ какъ получимъ

$$a+b=a(1+tang^2\varphi)=\frac{a}{cos^2\varphi}.$$

Если $a>b$, то формулу $a-b$ преобразуемъ въ удобную для логариѳмированія, полагая $b=a\sin^2\varphi$; такъ какъ имѣемъ

$$a-b=a(1-\sin^2\varphi)=a\cos^2\varphi.$$

Рѣшеніе уравненій второй степени посредствомъ тригонометрическихъ таблицъ.

59. Два корня уравненія второй степени:

(1) $$x^2+px+q=0$$

выражаются формулою

(2) $$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q};$$

предположимъ, что коэффиціенты p и q числа вещественныя, которыя даны или непосредственно, или посредствомъ своихъ логариѳмовъ.

1° Пусть $\frac{p^2}{4}-q>0$, — это тотъ случай, когда корни будутъ вещественные и неравные. Если имѣемъ въ то же время $q>0$, то положимъ

$$\frac{p}{2}=-\frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi};$$

вспомогательная дуга φ, заключающаяся между —90 и +90 градусами можетъ быть вычислена по формулѣ

$$log(-sin\varphi)=log\,2+\tfrac{1}{2}log\,q-log\,p,$$

если p число положительное, и по формулѣ

$$log\,sin\varphi=log\,2+\tfrac{1}{2}log\,q-log(-p),$$

если p число отрицательное. Формула (2) обратится тогда въ слѣдующую:

$$x=\sqrt{q}\left(\frac{1\pm cos\varphi}{sin\varphi}\right),$$

такъ что, назвавъ чрезъ x_1 и x_2 корни уравненія, будемъ имѣть:

$$x_1=\sqrt{q}\,tang\tfrac{1}{2}\varphi,\quad x_2=\sqrt{q}\,cot\tfrac{1}{2}\varphi;$$

оба выраженія удобны для логариѳмированія.

Если имѣемъ $q<0$, то можно положить

$$\frac{p}{2}=-\frac{\sqrt{-q}}{tang\varphi};$$

вспомогательная дуга φ, заключающаяся между —90 и +90 градусами, можетъ быть вычислена по формулѣ

$$log\,(-tang\varphi)=log\,2+\tfrac{1}{2}log(-q)-log\,p,$$

если p число положительное, и по формулѣ

$$log\,tang\varphi=log\,2+\tfrac{1}{2}log(-q)-log(-p),$$

если p число отрицательное. Тогда формула (2) приметъ видъ:

$$x=\sqrt{-q}\left(\frac{cos\varphi\pm 1}{sin\varphi}\right),$$

такъ что, назвавъ чрезъ x_1 и x_2 два корня уравненія, будемъ имѣть

$$x_1=-\sqrt{-q}\,tang\tfrac{1}{2}\varphi,\quad x_2=+\sqrt{-q}\,cot\tfrac{1}{2}\varphi.$$

2° Пусть $\frac{p^2}{4}-q<0$; можно положить

$$q=\frac{p^2}{4}\cdot\frac{1}{cos^2\varphi},$$

и вспомогательная дуга φ опредѣлится по формулѣ

$$log\ cos\varphi = log(\pm p) - \tfrac{1}{2} log\, q - log\, 2;$$

формула (2) обратится тогда въ слѣдующую:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \frac{p}{2} tang\varphi \sqrt{-1};$$

$-\frac{p}{2}$ представляетъ вещественную часть обоихъ мнимыхъ корней, а логариѳмъ коэффиціента при $\sqrt{-1}$ равенъ

$$log(\pm p) + log\ tang\varphi - log\, 2.$$

60. Можно свести къ рѣшенію уравненія второй степени задачу, которая состоитъ въ томъ, чтобы найти всѣ дуги x, удовлетворяющія уравненію

$$a cos x + b sin x = c,$$

гдѣ a, b, c обозначаютъ данныя числа, положительныя или отрицательныя. Дѣйствительно, для этого достаточно выразить $sinx$ и $cosx$ въ функціи одной и той же тригонометрической линіи; но вопросъ, о которомъ идетъ рѣчь, можетъ быть рѣшенъ гораздо проще слѣдующимъ образомъ. Опредѣлимъ вспомогательную дугу φ, заключающуюся между —90 и +90 градусами, такъ, чтобы

$$tang\varphi = \frac{b}{a};$$

послѣ замѣны b чрезъ $a\,tang\varphi$, данное уравненіе приметъ слѣдующій видъ

$$a(cos x + tang\varphi sin x) = c,$$

или

$$cos(x - \varphi) = \frac{c cos\varphi}{a}.$$

Чтобы предложенная задача была возможна, необходимо, чтобы число $\frac{c cos\varphi}{a}$ заключалось между —1 и +1, т. е. чтобы

$$\frac{c^2 cos^2\varphi}{a^2} < 1 \text{ или } c^2 < a^2 + b^2.$$

Если это условіе выполнено, то таблицы дадутъ намъ возможность найти дугу α, заключающуюся между 0 и 180 градусами, косинусъ

которой будетъ равенъ $\frac{c cos\varphi}{a}$; затѣмъ корни предложеннаго уравненія найдемъ по формулѣ

$$x = k.360° + \varphi \pm \alpha,$$

гдѣ k обозначаетъ любое цѣлое число—положительное, отрицательное, нуль.

Можно выразить всѣ корни x въ функціи какого нибудь одного изъ нихъ; въ самомъ дѣлѣ, обозначивъ чрезъ x_0 одинъ изъ этихъ корней, будемъ имѣть

$$\alpha = \pm(k'.360° + \varphi - x_0),$$

гдѣ k число цѣлое, и общее выраженіе для корней x будетъ слѣдующее

$$x = k.360° + \varphi \pm (\varphi - x_0);$$

эта формула равносильна двумъ слѣдующимъ:

$$x = k.360° + x_0,$$
$$x = k.360° + 2\varphi - x_0.$$

Рѣшеніе уравненій третьей степени посредствомъ тригонометрическихъ таблицъ.

61. Общее уравненіе третьей степени

(1) $$X^3 + PX^2 + QX + R = 0$$

приводится къ виду

(2) $$x^3 + px + q = 0,$$

если положимъ $X = -\frac{P}{3} + x$; поэтому можно ограничиться разсмотрѣніемъ уравненія (2), котораго коэффиціенты предположимъ вещественными. Мы видѣли (n° 29), что уравненіе

(3) $$z^3 - \frac{3}{4} z - \frac{cos\varphi}{4} = 0$$

имѣетъ три корня

$$cos\frac{\varphi}{3},\ cos\left(120° + \frac{\varphi}{3}\right),\ cos\left(240° + \frac{\varphi}{3}\right),$$

слѣдовательно, если окажется возможнымъ предложенное уравненіе (2) привести къ виду (3), то предложенная задача будетъ рѣшена. Положимъ $x=\lambda z$, тогда уравненіе (2) приметъ видъ:

$$z^3+\frac{p}{\lambda^2}z+\frac{q}{\lambda^3}=0, \tag{4}$$

и это уравненіе (4) совпадетъ съ (3), если опредѣлимъ количество λ и дугу φ такъ, чтобы мы имѣли два уравненія

$$\frac{p}{\lambda^2}=-\frac{3}{4},\quad \frac{q}{\lambda^3}=-\frac{\cos\varphi}{4},$$

изъ которыхъ найдемъ

$$\lambda=2\sqrt{-\frac{p}{3}},\quad \cos\varphi=\frac{-\frac{q}{2}}{\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3};$$

эти значенія для λ и $\cos\varphi$ будутъ вещественными только тогда, когда p отрицательное; но, чтобы ихъ можно было допустить, необходимо еще, чтобы величина $\cos^2\varphi$ была меньше 1, что требуетъ, чтобы

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0 \text{ или } 4p^3+27q^2<0.$$

Изъ этого условія вытекаетъ, что $p<0$; если оно будетъ выполнено, то отождествленіе уравненій (3) и (4) становится возможнымъ; тогда, такъ какъ дуга φ можетъ быть вычислена по формулѣ

$$\cos\varphi=\frac{-\frac{q}{2}}{\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3},$$

корни x_1, x_2, x_3 предложеннаго уравненія (2) будутъ

$$x_1=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3},\quad x_2=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(120^\circ+\frac{\varphi}{3}\right),$$

$$x_3=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(240^\circ+\frac{\varphi}{3}\right).$$

Въ разсмотренномъ нами случаѣ корни уравненія (1) вещественны и неравны; два изъ этихъ корней становятся равными, если

$$4p^3+27q^2=0;$$

предыдущее рѣшеніе сохраняетъ свое значеніе и въ этомъ случаѣ.

62. Разсмотримъ теперь случай, когда

$$4p^3+27q^2>0,$$

и, слѣдовательно, когда уравненіе (2) не можетъ быть приведено къ виду (3) при помощи тѣхъ преобразованій, которыя мы употребляли.

Пусть имѣемъ сначала $p=0$ и $q=-1$; уравненіе (2) принимаетъ видъ

$$x^3-1=0;$$

значенія x будутъ кубическими корнями изъ единицы; чтобы ихъ найти, замѣтимъ, что x^3-1 представляетъ произведеніе двухъ множителей $x-1$ и x^2+x+1; такъ что единица имѣетъ три кубическихъ корня, изъ которыхъ одинъ равенъ 1, а два другіе α и β корни уравненія второй степени

$$x^2+x+1=0;$$

найдемъ

$$\alpha=\frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2},\quad \beta=\frac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2};$$

а такъ какъ

$$\alpha\beta=1,\quad \alpha^3=1,\quad \beta^3=1,$$

то заключаемъ, что

$$\alpha=\beta^2 \text{ и } \beta=\alpha^2;$$

такъ что каждый изъ двухъ мнимыхъ кубическихъ корней изъ единицы равенъ квадрату другого.

Возвратимся теперь къ общему случаю и разберемъ отдѣльно случаи, когда $p<0$ и $p>0$.

1° Пусть $p<0$; обозначивъ чрезъ a и b два числа, соотвѣтственно

равныя или мнимымъ кубическимъ корнямъ α и β изъ единицы или равныя оба единицѣ, положимъ

$$x=\lambda(a\,tang\,\varphi+b\,cot\,\varphi);$$

возвышая въ кубъ, получимъ

$$x^3=\lambda^3[tang^3\varphi+cot^3\varphi+3(a\,tang\,\varphi+b\,cot\varphi)];$$

изъ двухъ предыдущихъ уравненій выводимъ

(5) $$x^3-3\lambda^2x-\lambda^3(tang^3\varphi+cot^3\varphi)=0.$$

Изъ способа, по которому образовано это уравненіе (5), видно, что его три корня будутъ

(6) $$\lambda(tang\,\varphi+cot\,\varphi),\quad \lambda(\alpha\,tang\,\varphi+\beta\,cot\,\varphi),\quad \lambda(\beta\,tang\,\varphi+\alpha\,cot\,\varphi),$$

и, слѣдовательно, уравненіе (2) будетъ рѣшено, если удастся отождествить его съ уравненіемъ (5). Для этого достаточно опредѣлить λ и φ такимъ образомъ, чтобы

$$-3\lambda^2=p,\quad -\lambda^3(tang^3\varphi+cot^3\varphi)=q;$$

первое изъ этихъ уравненій даетъ

$$\lambda=\sqrt{\frac{-p}{3}},$$

затѣмъ будемъ имѣть

$$tang^3\varphi+cot^3\varphi=\frac{-q}{\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3}.$$

Для опредѣленія φ введемъ такую вторую вспомогательную дугу ψ, чтобы

$$tang\,\psi=tang^3\varphi;$$

тогда найдемъ

$$tang\,\psi+cot\,\psi=\frac{2}{sin\,2\psi}=\frac{-q}{\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3},$$

откуда

$$sin\,2\psi=-\frac{\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3}{\frac{1}{2}q};$$

изъ этого уравненія можно опредѣлить значеніе ψ, заключающееся

между -45 и $+45$ градусами; потому что, по предположенію, $4p^3+27q^2>0$, и, слѣдовательно, предыдущее значеніе $sin\,2\psi$ заключается между -1 и $+1$; затѣмъ найдемъ значеніе φ, также заключающееся между -45 и $+45$ градусами, при помощи формулы

$$tang\,\varphi=\sqrt[3]{tang\,\psi}.$$

Вычисливъ, такимъ образомъ, дуги φ и ψ, получимъ для корней уравненія (2) выраженія (6), которыя, если замѣнимъ α и β ихъ значеніями, найденными выше, обратятся въ слѣдующія:

$$\sqrt{\frac{-p}{3}}(tang\,\varphi+cot\,\varphi),$$

$$-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{-p}{3}}(tang\,\varphi+cot\,\varphi)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-p}(tang\,\varphi-cot\,\varphi)\sqrt{-1},$$

или

$$\frac{2\sqrt{\frac{-p}{3}}}{sin\,2\varphi}\quad\text{и}\quad\frac{-\sqrt{\frac{-p}{3}}}{sin\,2\varphi}\pm\sqrt{-p}\,cot\,2\varphi\,\sqrt{-1}.$$

При помощи этихъ формулъ можно вычислить, посредствомъ таблицъ, вещественный корень, а также и коэффиціентъ при $\sqrt{-1}$ въ мнимыхъ корняхъ.

2° Пусть $p>0$; обозначивъ чрезъ a и b, какъ и прежде, два числа, соотвѣтственно равныя мнимымъ кубическимъ корнямъ α и β изъ единицы или равныя оба единицѣ, положимъ

$$x=\lambda(a\,tang\,\varphi-b\,cot\,\varphi);$$

возвышая въ кубъ, получимъ

$$x^3=\lambda^3[tang^3\varphi-cot^3\varphi-3(a\,tang\,\varphi-b\,cot\,\varphi)],$$

откуда найдемъ уравненіе

(7) $$x^3+3\lambda^2x-\lambda^3(tang^3\varphi-cot^3\varphi)=0,$$

корни котораго будутъ

(8) $$\lambda(tang\,\varphi-cot\,\varphi),\quad \lambda(\alpha\,tang\,\varphi-\beta\,cot\,\varphi),\quad \lambda(\beta\,tang\,\varphi-\alpha\,cot\,\varphi).$$

Чтобы уравненія (2) съ (7) были тождественны, необходимо и достаточно положить

$$3\lambda^2=p,\quad -\lambda^3(tang^3\varphi-cot^3\varphi)=q;$$

*

первое изъ этихъ уравненій даетъ

$$\lambda = \sqrt{\frac{p}{3}};$$

а затѣмъ, будемъ имѣть

$$tang^3\varphi - cot^3\varphi = -\frac{q}{\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3}.$$

Для опредѣленія φ введемъ такую вторую вспомогательную дугу ψ, чтобы

$$tang\psi = tang^3\varphi;$$

тогда найдемъ

$$tang\psi - cot\psi = -2\,cot\,2\psi = -\frac{q}{\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3},$$

откуда

$$cot\,2\psi = \frac{q}{2\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3};$$

такъ какъ уголъ ψ будетъ извѣстенъ, то φ вычислимъ по формулѣ

$$tang\varphi = \sqrt[3]{tang\psi},$$

и корни уравненія (2) будутъ:

$$\sqrt{\frac{p}{3}}(tang\varphi - cot\varphi),$$

$$-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{3}}(tang\varphi - cot\varphi) \pm \frac{\sqrt{p}}{2}(tang\varphi + cot\varphi)\sqrt{-1},$$

или

$$-2\sqrt{\frac{p}{3}}\,cot\,2\varphi \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{p}{3}}\,cot\,2\varphi \pm \frac{\sqrt{p}}{sin\,2\varphi}\sqrt{-1}.$$

Мы видимъ, что, если $4p^3+27q^2>0$, то предложенное уравненіе (2) всегда имѣетъ два мнимыхъ корня.

63. Примѣръ I.—Пусть предложено рѣшить уравненіе

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Здѣсь имѣемъ $p=-7$, $q=7$; предложенное уравненіе имѣетъ два

корня положительныхъ x_1 и x_2 и одинъ отрицательный x_3. Дѣйствительно, имѣемъ

$$x_1 = \sqrt{\frac{28}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{28}{3}}\cos\left(240^\circ + \frac{\varphi}{3}\right),$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{28}{3}}\cos\left(120^\circ + \frac{\varphi}{3}\right),$$

и

$$\cos\varphi = -\sqrt{\frac{27}{28}}, \quad tang\varphi = -\frac{1}{\sqrt{27}}.$$

ОБРАЗЕЦЪ ВЫЧИСЛЕНІЯ.

Вычисленіе φ.

$log(-tang\varphi)$	$\bar{1},2843181$
$180^\circ - \varphi$	$10^\circ 53' 36'',2$
$\frac{\varphi}{3} =$	$56^\circ 22' 7'',9$
$240^\circ + \frac{\varphi}{3} = 360^\circ -$	$(63^\circ 37' 52'',1)$
$120^\circ + \frac{\varphi}{3} = 180^\circ -$	$(3^\circ 37' 52'',3)$

Вычисленіе x_1.

$log\sqrt{\frac{28}{3}}$	$0,4850184$
$log\cos\frac{\varphi}{3}$	$\bar{1},7433876$
$log\,x_1$	$0,2284060$

$x_1 = 1,69202$

Вычисленіе x_2.

$log\sqrt{\frac{28}{3}}$	$0,4850184$
$log\cos\left(240^\circ + \frac{\varphi}{3}\right)$	$\bar{1},6475280$
$log\,x_2$	$0,1325464$

$x_2 = 1,35689$

Вычисленіе x_3.

$log\sqrt{\frac{28}{3}}$	$0,4850184$
$log\left[-\cos\left(120^\circ + \frac{\varphi}{3}\right)\right]$.	$\bar{1},9991270$
$log(-x_3)$	$0,4841454$

$x_3 = -3,04892.$

64. Примѣръ II.—Пусть предложено рѣшить уравненіе

$$x^3 - 6x + 6 = 0.$$

Здѣсь имѣемъ $p=-6$, $q=6$; предложенное уравненіе имѣетъ одинъ

корень вещественный отрицательный x_1 и два корня мнимыхъ:— $-\frac{x_1}{2} \pm u\sqrt{-1}$. Дѣйствительно, имѣемъ

$$x_1 = \frac{-\sqrt{8}}{\sin 2\varphi},\quad u = \sqrt{6}\cot 2\varphi,$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\psi},\quad \sin 2\psi = \frac{\sqrt{8}}{3},\quad \operatorname{tang} 2\psi = \sqrt{8}.$$

ОБРАЗЕЦЪ ВЫЧИСЛЕНІЕ.

Вычисленіе ψ.

$\log\operatorname{tang} 2\psi$	0,4515450
$2\psi = 70°31'43'',6$	
$\psi = 35°15'51'',8$	

Вычисленіе φ.

$\log\operatorname{tang}\varphi$	$\overline{1}$,9498283
$\varphi = 41°41'52'',0$	
$2\varphi = 83°23'44'',0$	

Вычисленіе x_1.

$\frac{1}{2}\log 8$	0,4515450
$-\log\sin 2\varphi$	0,0028916
$\log(-x_1)$	0,4544366
$x_1 = -2,84732$	

Вычисленіе u.

$\frac{1}{2}\log 6$	0,3890756
$\log(-\cot 2\varphi)$	$\overline{1}$,0636431
$\log u$	$\overline{1}$,4527187
$u = 0,283608$.	

Корни уравненія будутъ

$$-2,84732 \text{ и } 1,42366 \pm 0,283608\sqrt{-1}.$$

Упражненія.

I. Дѣлятъ дугу $2x$ на n равныхъ частей; требуется: 1° опредѣлить разстояніе центра среднихъ разстояній точекъ дѣленія до какого нибудь діаметра; 2° доказать, что предѣлъ, для $n=\infty$, разстоянія отъ центра круга до центра среднихъ разстояній равенъ $\frac{\sin x}{x}$ *).

II. Доказать, что разность $x-\sin x$ будетъ тѣмъ менѣе, чѣмъ менѣе x.

*) Пусть даны n точекъ $A, B, C, D,..., N$, (лежащихъ или не лежащихъ въ одной плоскости—безразлично). Центръ среднихъ разстояній данныхъ точекъ есть точка, положеніе которой опредѣляется слѣдующимъ образомъ: беремъ изъ числа данныхъ точекъ любыя двѣ, напр. A и B, и соединяемъ ихъ прямою. Беремъ на этой прямой точку α, въ которой отрѣзокъ AB дѣлится пополамъ. Точку α соединяемъ прямой съ любою изъ остальныхъ точекъ $C, D,..., N$, напр., съ C. На прямой αC, между точками α и C, беремъ точку β такъ, чтобы $\alpha\beta = \frac{1}{2}\beta C$. Точку β соединяемъ прямой съ любой изъ оставшихся точекъ $D,...,N$, напр., съ D и на прямой βD, между точками β и D, беремъ точку γ такъ, чтобы $\beta\gamma = \frac{1}{3}\gamma D$ и т. д., пока не присоединимъ послѣдней точки изъ числа данныхъ. Точка, которой закончится рядъ нашихъ послѣдовательныхъ построеній, и будетъ центръ среднихъ разстояній. Положеніе его не зависитъ отъ того порядка, въ которомъ берутся точки $A, B,..., N$, т. е. если вмѣсто точекъ A и B сначала взяли бы какія нибудь двѣ другія точки, напр., C и D, и по этимъ двумъ точкамъ опредѣлили бы положеніе точки α' совершенно такъ же, какъ по точкамъ A и B опредѣлили положеніе точки α; затѣмъ по точкѣ α' и любой изъ точекъ $A, B,..., N$, изъ числа которыхъ исключены точки C и D, опредѣлили бы положеніе новой точки β' точно такъ же, какъ по точкамъ α и C опредѣлили положеніе β и т. д., то пришли бы опять къ той же конечной точкѣ, что и въ предыдущемъ случаѣ. *Примѣчаніе Ред.*

III. Доказать, что если x заключается между нулемъ и $\frac{\pi}{2}$, то отношеніе $\frac{\sin x}{x}$ есть предѣлъ, къ которому приближается произведеніе $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}...\cos\frac{x}{2^n}$, при безпредѣльномъ увеличеніи цѣлаго числа n. Изъ этого свойства вывести неравенства: $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ и $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

IV. Доказать, что если x заключается между нулемъ и $\frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tang} x > x + \frac{x^3}{3} \text{ и } x < \tfrac{1}{3}\operatorname{tang} x + \tfrac{2}{3}\sin x.$$

V. Доказать, что отношенія $\frac{\sin x}{x}$ и $\frac{x-\sin x}{x^3}$ уменьшаются, если дуга x возрастаетъ отъ нуля до $\frac{\pi}{2}$. Получивъ неравенство $\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin(x+h)}{x+h}$, гдѣ x и h, по предположенію, положительны и $x+h$ меньше $\frac{\pi}{2}$, можно доказать неравенство $\frac{x-\sin x}{x^3} > \frac{x+h-\sin(x+h)}{(x+h)^3}$, пользуясь для этого формулой, изъ которой было выведено неравенство $x-\sin x < \frac{x^3}{6}$ въ п° 46.

VI. Доказать неравенство

$$\frac{x-\sin x}{x^3} > \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \text{ или } x-\sin x > \frac{x^3}{6,79...}$$

для всѣхъ значеній x, заключающихся между нулемъ и $\frac{\pi}{2}$.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ТРИГОНОМЕТРІЯ.

Предметъ прямолинейной тригонометріи.

65. Въ треугольникѣ мы имѣемъ шесть элементовъ для разсмотрѣнія: три стороны и три угла. *Рѣшить* треугольникъ—это значитъ, по достаточному числу данныхъ, найти числовыя значенія всѣхъ его элементовъ.

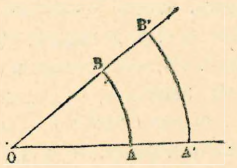
Предметъ прямолинейной тригонометріи есть рѣшеніе прямолинейныхъ треугольниковъ.

Числовыя значенія длинъ получаются, если найдутъ отношенія этихъ длинъ къ длинѣ выбранной за единицу. Перейдемъ къ измѣренію угловъ.

Измѣреніе угловъ.

66. Пусть данъ уголъ AOB (фиг. 8); изъ вершины его, какъ изъ центра, произвольнымъ радіусомъ опишемъ окружность, и обо-

Фиг. 8.



значимъ чрезъ R и S число единицъ, заключающихся въ радіусѣ OA и дугѣ AB, ограниченной сторонами угла. Отношеніе $\frac{S}{R}$ не зависитъ отъ величины радіуса OA, потому что, если изъ точки O, какъ изъ центра, опишемъ другую окружность $A'B'$, и обозначимъ чрезъ

R' и S' числа, которыя измѣряютъ радіусъ OA' и дугу $A'B'$, то, по извѣстной теоремѣ, будемъ имѣть

$$\frac{S}{R}=\frac{S'}{R'}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что если положить

$$\omega=\frac{S}{R},$$

то отношеніе будетъ зависить только отъ величины угла AOB; такъ какъ, кромѣ того, уголъ AOB измѣняется пропорціонально числу ω, то можно принять ω за его *мѣру*. При $S=R$, ω равно 1; слѣдовательно, ω представляетъ отношеніе угла AOB къ нѣкоторому углу, который можно принять за единицу и который таковъ, что если опишутъ изъ его вершины, какъ изъ центра, произвольнымъ радіусомъ окружность, то дуга, заключающаяся между его сторонами, равна радіусу круга.

Формула $S=R\omega$ очень часто употребляется въ геометрическихъ приложеніяхъ; она позволяетъ сравнивать дуги, принадлежащія различнымъ окружностямъ.

Если примемъ радіусъ OA за линейную единицу, то получимъ

$$R=1 \text{ и } \omega=S;$$

такимъ образомъ, *уголъ измѣряется тѣмъ же числомъ, какъ и дуга, заключающаяся между его сторонами и составляющая часть окружности, описанной изъ его вершины, какъ изъ центра, радіусомъ равнымъ единицѣ*. Напримѣръ, одно и то же число $\frac{\pi}{2}$ безразлично будетъ выражать какъ прямой уголъ, такъ и квадрантъ. По этой причинѣ слова *уголъ* и *дуга* часто употребляются, какъ синонимы.

И такъ какъ мы согласились, въ приложеніяхъ теоріи круговыхъ функцій, выражать дуги числами градусовъ, минутъ, секундъ и пр., въ нихъ заключающихся, то эти же числа градусовъ будутъ также выражать и соотвѣтствующіе углы.

Мы будемъ называть *синусомъ*, *косинусомъ*, *тангенсомъ*, *котангенсомъ*, *секансомъ* и *косекансомъ угла* синусъ, косинусъ, тангенсъ, котангенсъ, секансъ и косекансъ дуги, заключающейся между сторонами этого угла и составляющей часть окружности, описанной изъ его вершины, какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ единицѣ.

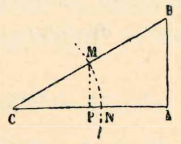
Мы всегда будемъ обозначать углы треугольника буквами A, B, C, а соотвѣтственныя противолежащія стороны буквами a, b, c; острые и тупые углы называются *косыми*, и треугольники, въ котырыхъ нѣтъ прямого угла, называются *косоугольными*.

Соотношенія между углами и сторонами въ прямоугольномъ треугольникѣ.

67. Теорема.—*Во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ катетъ равенъ гипотенузѣ, умноженной на синусъ угла противолежащаго, или на косинусъ угла прилежащаго.*

Пусть ABC (фиг. 9) будетъ прямоугольный треугольникъ и уголъ

Фиг. 9.



A прямой; изъ точки C, какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ единицѣ, опишемъ дугу круга MN, и опустимъ перпендикуляръ MP на линію AC; изъ подобныхъ треугольниковъ ABC и PMC будемъ имѣть

$$\frac{c}{a}=\frac{MP}{CM},\quad \frac{b}{a}=\frac{CP}{CM}.$$

Кромѣ того, имѣемъ

$$CM=1,\ MP=\sin C,\ CP=\cos C;$$

слѣдовательно,

$$c=a\sin C,\ b=a\cos C.$$

Слѣдствіе.—*Во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ каждый катетъ равенъ другому катету, умноженному на тангенсъ угла противолежащаго, или на котангенсъ угла прилежащаго.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть A будетъ прямой уголъ; на основаніи предыдущей теоремы имѣемъ

$$c=a\sin C,\ b=a\cos C,$$

откуда, по раздѣленіи почленно другъ на друга этихъ двухъ равенствъ, получимъ

$$\frac{c}{b}=\tan g\,C \text{ и } c=b\tan g\,C,$$

или

$$c=b\cot B.$$

Замѣчаніе. — Между углами и сторонами прямоугольнаго треугольника не можетъ существовать соотношеній, не вытекающихъ изъ трехъ слѣдующихъ:

$$B+C=90°,$$
$$c=a\sin C,\ b=a\cos C;$$

такъ какъ если бы существовало подобное соотношеніе, то, замѣняя въ немъ c, b и B ихъ значеніями $a\sin C$, $a\cos C$ и $90°-C$, получили бы уравненіе, связывающее a и C, чего быть не можетъ.

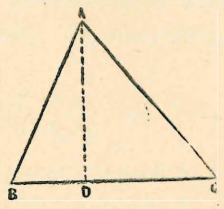
Сложивъ двѣ послѣднія формулы, возвысивъ ихъ предварительно въ квадратъ, получимъ извѣстное равенство

$$c^2+b^2=a^2.$$

Соотношенія между углами и сторонами въ косоугольномъ треугольникѣ.

68. Теорема. I. — *Во всякомъ прямолинейномъ треугольникѣ стороны пропорціональны синусамъ противолежащихъ угловъ.*

Фиг. 10.



Пусть ABC (фиг. 10) будетъ треугольникъ, въ которомъ углы

B и C острые; изъ вершины A опустимъ перпендикуляръ AD на основаніе BC; точка D упадетъ между точками B и C, при чемъ изъ прямоугольныхъ треугольниковъ ABD и ACD, будемъ имѣть (n° 67).

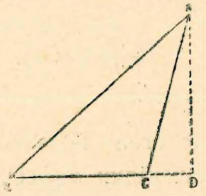
$$AD=c\sin B,\quad AD=b\sin C,$$

откуда

$$c\sin B=b\sin C \text{ или } \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

Если одинъ изъ угловъ B или C тупой (фиг. 11), напр. C, то основаніе перпендикуляра AD придется на продолженіи BC, и такъ

Фиг. 11.



какъ два пополнительные угла имѣютъ одинаковые синусы, то изъ прямоугольныхъ треугольниковъ ABC и ACD будемъ имѣть

$$AD=c\sin B=b\sin C.$$

откуда мы выводимъ, что вышеприведенная формула обща.

69. И такъ, на основаніи предыдущаго, имѣемъ три слѣдующихъ соотношенія между углами и сторонами треугольника:

$$(1)\qquad \begin{cases} A+B+C=180^\circ, \\ \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}; \end{cases}$$

и я говорю, что не можетъ существовать другого соотношенія, не вытекающаго изъ вышеприведенныхъ. Дѣйствительно, изъ уравненій получимъ

$$A=180^\circ-B-C,\quad b=\frac{a\sin B}{\sin(B+C)},\quad b=\frac{a\sin C}{\sin(B+C)};$$

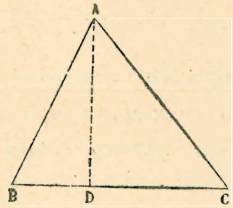
послѣ этого, если бы существовало между углами и сторонами соотношеніе, не вытекающее изъ соотношеній (1), то, подставляя въ него вмѣсто A, b, c значенія, которыя мы только что написали, получили бы уравненіе, связывающее сторону a и два прилежащихъ къ ней угла B и C, что не возможно.

Но изъ уравненій (1) можно вывести другія весьма важныя соотношенія, которыя также являются теоремами; мы непосредственно докажемъ эти теоремы, а затѣмъ покажемъ, какимъ образомъ различныя найденныя нами соотношенія могутъ быть выведены одни изъ другихъ

70. Теорема II. — *Во всякомъ прямолинейномъ треугольникѣ квадратъ стороны равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ безъ удвоеннаго произведенія этихъ двухъ другихъ сторонъ на косинусъ угла между ними.*

Пусть ABC (фиг. 12) будетъ треугольникъ, въ которомъ уголъ C

Фиг. 12.



острый; изъ вершины A опустимъ перпендикуляръ AD на BC; будемъ имѣть

$$c^2=a^2+b^2-2a\times CD;$$

но изъ прямоугольнаго треугольника ACD имѣемъ (n° 67)

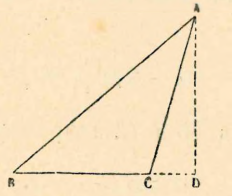
$$CD=b\cos C,$$

слѣдовательно,

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

Если въ треугольникѣ уголъ C тупой (фиг. 13), то будемъ имѣть

Фиг. 13.



$$c^2=a^2+b^2+2a\times CD;$$

изъ прямоугольнаго треугольника ACD найдемъ:

$$CD=b\cos ACD=b\cos(180°-C)=-b\cos C,$$

слѣдовательно, какъ и первомъ случаѣ, имѣемъ

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

Наконецъ, эта формула справедлива и тогда, когда уголъ C прямой; такъ какъ въ этомъ случаѣ $\cos C$ равенъ нулю, и она обращается въ слѣдующую $c^2=a^2+b^2$.

И такъ, теорема, которую мы только что доказали, даетъ три соотношенія:

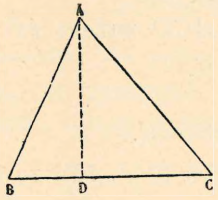
$$(2)\qquad \begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A, \\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos B, \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C, \end{cases}$$

изъ которыхъ каждое содержитъ стороны и уголъ.

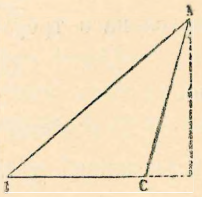
71. Теорема III. — *Во всякомъ прямолинейномъ треугольникѣ сторона равна суммѣ двухъ другихъ сторонъ, умноженныхъ каждая на косинусъ угла, составляемаго ею съ первой стороной.*

Пусть данъ треугольникъ ABC (фиг. 14); изъ вершины A

Фиг. 14.



Фиг. 15.



опустимъ перпендикуляръ AD на BC; тогда, если оба угла B и C острые, будемъ имѣть

$$a=BD+DC,$$

а если одинъ изъ угловъ B и C, напримѣръ C, тупой (фиг. 15), то

$$a=BD-DC.$$

Но, въ первомъ случаѣ, $DC=b\cos C$, а во второмъ, $DC=b\cos(180°-C)=-b\cos C$; въ обоихъ случаихъ $BD=c\cos B$; поэтому получимъ

$$a=b\cos C+c\cos B.$$

Эта теорема доставляетъ три соотношенія

$$(3)\qquad \begin{cases} a=b\cos C+c\cos B, \\ b=c\cos A+a\cos C, \\ c=a\cos B+b\cos A. \end{cases}$$

72. Чтобы изъ уравненій (2) вывести уравненія (3), сложимъ два первыхъ уравненія (2); тогда, послѣ приведенія, получимъ

$$c=a\cos B+b\cos A.$$

Это одно изъ уравненій (3); тѣмъ же способомъ можно получить два другія.

Обратно, чтобы уравненія (2) вывести изъ уравненій (3), сложимъ уравненія (3), предварительно умноживъ ихъ соотвѣтственно на a, b, $-c$; получимъ

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

Это одно изъ уравненій (2); точно также можно получить два другія.

Отсюда слѣдуетъ, что системы (2) и (3) равносильны; мы покажемъ, какимъ образомъ можно вывести одну изъ этихъ системъ, напримѣръ (3), изъ основныхъ уравненій (1).

Изъ перваго уравненія (1) имѣемъ

$$C=180°-(A+B),$$

откуда

$$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A;$$

если замѣнимъ $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ пропорціональными имъ числами a, b, c, то найдемъ

$$c=a\cos B+b\cos A.$$

Это одно изъ уравненій (3); точно также можно получить и два другія.

Я говорю, наконецъ, что уравненія (1) могутъ быть выведены изъ уравненій (2) или (3), если только принять условіе, что сумма

$A+B+C$ не превышаетъ 180 градусовъ. Въ самомъ дѣлѣ, изъ перваго изъ уравненій (2) получимъ

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\sin^2 A = \frac{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2}{4b^2c^2};$$

слѣдовательно,

$$\frac{\sin^2 A}{a^2} = \frac{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2}{4a^2b^2c^2}.$$

Очевидно, мы получимъ то же самое значеніе для $\frac{\sin^2 B}{b^2}$ и для $\frac{\sin^2 C}{c^2}$; такъ какъ выраженіе, полученное для $\frac{\sin^2 A}{a^2}$, не мѣняется, когда замѣнимъ стороны a, b, c однѣ другими. Поэтому если мы знаемъ, что A, B, C менѣе 180 градусовъ, то, такъ какъ ихъ синусы количества положительныя, можемъ написать

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Во-вторыхъ, можно исключить a, b, c изъ уравненій (2) или (3), такъ какъ эти уравненія однородны; если исключить двѣ изъ трехъ сторонъ, то третья также исключится, и тогда получимъ

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C-1=0,$$

или

$$(\cos A+\cos B\cos C)^2=1-\cos^2 B-\cos^2 C+\cos^2 B\cos^2 C=\sin^2 B\sin^2 C,$$

или, извлекая квадратные корни,

$$\cos A=-\cos B\cos C\pm\sin B\sin C=-\cos(B\pm C);$$

откуда

$$A\pm B\pm C=180^\circ\times(2k+1),$$

гдѣ k цѣлое число. И если сумма $A+B+C$ не превышаетъ 180 градусовъ, то

$$A+B+C=180^\circ.$$

Другія формулы, относящіяся до косоугольныхъ треугольниковъ.

73. Преобразовывая предыдущія соотношенія, мы получимъ новыя формулы, которыя полезно знать. Къ выводу ихъ мы теперь и перейдемъ.

Изъ основныхъ соотношеній

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

выводимъ

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin A+\sin B}{\sin C} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C},$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin A-\sin B}{\sin C} = \frac{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C},$$

или, такъ какъ $\frac{1}{2}(A+B)=90^\circ-\frac{1}{2}C$,

$$(1)\qquad \frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}, \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C};$$

дѣля эти уравненія (1) одно на другое, получимъ

$$(2)\qquad \tan\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b}\cot\tfrac{1}{2}C.$$

Формулы (1) заключаютъ въ себѣ шесть элементовъ, но формула (2) содержитъ только двѣ стороны и углы.

74. Изъ соотношенія

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

имѣемъ

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};$$

но

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}, \quad \sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}};$$

подставляя вмѣсто $\cos A$ его значеніе, получимъ

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{4bc}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$
$$=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}.$$

Посредствомъ простой перестановки буквъ найдемъ подобныя же формулы для выраженія косинусовъ и синусовъ угловъ $\frac{1}{2}B$ и $\frac{1}{2}C$. Поэтому, если для сокращенія, положимъ

$$a+b+c=2p,$$

откуда

$$-a+b+c=2(p-a),$$
$$a-b+c=2(p-b),$$
$$a+b-c=2(p-c),$$

то найдемъ слѣдующія двѣ системы формулъ:

(3)
$$\begin{cases} \cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \\ \cos\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}, \\ \cos\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}. \end{cases}$$

(4)
$$\begin{cases} \sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \\ \sin\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}, \\ \sin\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}; \end{cases}$$

наконецъ, дѣля каждую формулу группы (4) на соотвѣтствующую ей формулу группы (3), получимъ слѣдующую новую систему формулъ:

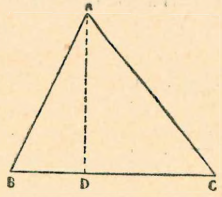
(5)
$$\begin{cases} \operatorname{tang}\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}, \\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}. \end{cases}$$

Во всѣхъ этихъ формулахъ должно брать радикалъ со знакомъ $+$, такъ какъ въ треугольникѣ половины угловъ меньше 90 градусовъ, и поэтому ихъ тригонометрическія линіи положительны.

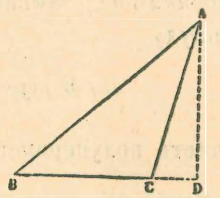
Выраженія площади треугольника и радіусовъ круговъ вписаннаго и описаннаго.

75. Площадь треугольника.—Пусть данъ треугольникъ ABC

Фиг. 16.



Фиг. 17.



(фиг. 16 и 17); изъ вершины A проведемъ высоту AD; тогда, означивъ площадь треугольника чрезъ s, будемъ имѣть

$$s=\tfrac{1}{2}a\times AD.$$

Но, изъ прямоугольнаго треугольника ADC имѣемъ $AD=b\sin C$; слѣдовательно,

(1
$$s=\tfrac{1}{2}ab\sin C.$$

Такимъ образомъ, *площадь треугольника равна половинѣ произведенія двухъ его сторонъ на синусъ угла, заключеннаго между ними.*

Прилагая это предложеніе къ четыремъ треугольникамъ, на которые можетъ быть раздѣленъ четыреугольникъ своими діагоналями, получимъ слѣдующій результатъ:

Площадь всякаго четыреугольника равна половинѣ произведенія его діагоналей, умноженнаго на синусъ угла между ними.

Если въ формулѣ (1) замѣнимъ b его значеніемъ, полученнымъ изъ уравненія

$$\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{\sin B}{\sin(B+C)},$$

*

то будемъ имѣть

$$(2) \qquad s=\tfrac{1}{2}\frac{a^2 \sin B \sin C}{\sin(B+C)}.$$

Наконецъ, изъ уравненій

$$\sin\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \quad \cos\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}},$$

выведенныхъ въ п° 74, найдемъ

$$\sin C=2\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C=2\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{ab},$$

и, если въ формулѣ (1) замѣнимъ $\sin C$ этимъ его значеніемъ, то получимъ формулу

$$(3) \qquad s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

гдѣ p обозначаетъ полупериметръ $\frac{a+b+c}{2}$.

Изъ этой формулы и формулъ, которыя мы получили въ п° 74, выводимъ нижеслѣдующія, которыя слѣдуетъ замѣтить:

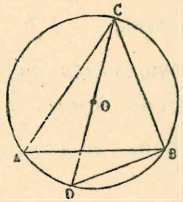
$$\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}=\frac{s^2}{pabc},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C=\frac{p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{abc}=\frac{ps}{abc},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C=\frac{s}{p^2}.$$

76. Радіусъ круга описаннаго.—Описавъ окружность около треугольника ABC (фиг. 18), проведемъ чрезъ вершину C діаметръ

Фиг. 18.



$CD=2R$, и линію DB; уголъ D въ прямоугольномъ треуголь-

никѣ BCD будетъ равенъ или A или пополненію A, слѣдовательно, имѣемъ

$$a=2R\sin A \text{ или } R=\frac{a}{2\sin A}.$$

Умножая числителя и знаменателя на bc, найдемъ

$$R=\frac{abc}{2bc\sin A}=\frac{abc}{4s}=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

77. Радіусы круговъ вписаннаго и извнѣвписанныхъ.—Пусть r будетъ радіусъ круга вписаннаго; соединивъ центръ этого круга съ тремя вершинами, разобьемъ треугольникъ на три другихъ треугольника, имѣющихъ общую высоту r, а основаніями соотвѣтственно три стороны a, b, c; слѣдовательно, имѣемъ $s=r\frac{a+b+c}{2}$, или

$$s=pr \text{ и } r=\frac{s}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Если обозначимъ чрезъ α, β, γ радіусы круговъ извнѣвписанныхъ въ треугольникъ, т. е. круговъ, которые касаются соотвѣтственно сторонъ a, b, c и продолженій двухъ другихъ сторонъ, то легко видѣть, что мы будемъ имѣть

$$s=(p-a)\alpha=(p-b)\beta=(p-c)\gamma,$$

откуда получимъ

$$\alpha=\frac{s}{p-a}=\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}},$$

$$\beta=\frac{s}{p-b}=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}},$$

$$=\frac{s}{p-c}=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}.$$

Также можемъ написать (п° 74)

$$\alpha=p\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A,\ \beta=p\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B,\ \gamma=p\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C.$$

Изъ этихъ формулъ можно вывести многія другія, между которыми слѣдуетъ замѣтить три слѣдующихъ:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma},$$

$$s=\sqrt{r\alpha\beta\gamma},$$

$$4R=\alpha+\beta+\gamma-r.$$

Рѣшеніе прямоугольныхъ треугольниковъ.

78. Первый случай.—*По данной гипотенузѣ a и острому углу B вычислить уголъ C и двѣ другія стороны b и c.*

Неизвѣстные элементы треугольника опредѣлятся изъ формулъ

$$C=90°-B,\ b=a\sin B,\ c=a\cos B.$$

Первая непосредственно опредѣляетъ значеніе C, а изъ двухъ другихъ находимъ

$$\log b=\log a+\log\sin B,\ \log c=\log a+\log\cos B.$$

79. Второй случай.—*По данной гипотенузѣ a и катету b найти катетъ c и два угла B и C.*

Для опредѣленія неизвѣстныхъ элементовъ, имѣемъ формулы

$$\sin B=\cos C=\frac{b}{a},\ c^2=a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

Какъ мы видимъ, уголъ C можно прямо опредѣлить по косинусу, но нельзя достигнуть желаемой степени точности, если гипотенуза какъ это часто бываетъ, мало отличается отъ своего катета. Въ этомъ случаѣ можно начать съ вычисленія c, а потомъ уже опредѣлить уголъ C по формулѣ

$$\operatorname{tang} C=\frac{c}{b};$$

такимъ образомъ для логариѳмическаго вычисленія будемъ имѣть

$$\log c=\tfrac{1}{2}[\log(a+b)+\log(a-b)]$$
$$\log\operatorname{tang} C=\log c-\log b.$$

Можно также уголъ C вычислить непосредственно слѣдующимъ образомъ. Замѣняя $\cos C$ его значеніемъ $\frac{b}{a}$ въ формулахъ

$$\sin\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{1-\cos C}{2}},\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}},$$

получимъ

$$\sin\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{a-b}{2a}},\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}};$$

каждая изъ этихъ формулъ даетъ намъ возможность найти уголъ C съ достаточною точностію, но вторая формула предпочтительнѣе, такъ какъ для вычисленія ея нужны только логариѳмы, служащіе для вычисленія c.

80. Третій случай.—*По катету b и одному изъ острыхъ угловъ вычислить другой уголъ и двѣ другія стороны.*

Неизвѣстные элементы опредѣлятся по формуламъ

$$B+C=90°,\ a=\frac{b}{\sin B},\ c=b\cot B;$$

двѣ послѣднія для логариѳмическаго вычисленія даютъ

$$\log a=\log b-\log\sin B,$$
$$\log c=\log b+\log\cot B.$$

81. Четвертый случай.—*По даннымъ двумъ катетамъ b и c вычислить гипотенузу a и два острые угла B и C.*

Для опредѣленія неизвѣстныхъ элементовъ имѣемъ

$$\cot C=\operatorname{tang} B=\frac{b}{c},\ a^2=b^2+c^2.$$

Эта послѣдняя формула не удобна для логариѳмированія; впрочемъ можно ее преобразовать въ удобную для логариѳмированія, если введемъ вспомогательный уголъ; но это приводитъ насъ къ вычисленію угла B по формулѣ

$$\log\operatorname{tang} B=\log b-\log c,$$

а затѣмъ по формулѣ

$$a=\frac{b}{\sin B}\text{ или }\log a=\log b-\log\sin B.$$

82. Примѣръ.—*Дано*

$$a=5892^m,51,\ b=5439^m,24,$$

требуется вычислить c, B и C.

ОБРАЗЕЦЪ ВЫЧИСЛЕНІЯ.

$a+b=11331{,}75$, $a-b=453{,}27$.

Вычисленіе стороны c.

$$c=\sqrt{(a+b)(a-b)}$$

$\log(a+b)$	4,0542970
$\log(a-b)$	2,6563570
.....	6,7106540
$\log c$	3,3553270

$c=2266^m{,}35$

Вычисленіе угла C.

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

$-\log(a+b)$	$\overline{5}$,9457030
$\log(a-b)$	2,6563570
.....	$\overline{2}$,6020600
$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}C$	$\overline{1}$,3010300

$\frac{1}{2}C=11°18'35''{,}76$

$C=22°37'11''{,}52$

Затѣмъ найдемъ

$$B=90°-C=67°22'48''{,}48.$$

Рѣшеніе прямолинейнаго треугольника по данной сторонѣ и двумъ угламъ.

83. Неизвѣстный уголъ получится непосредственно по формулѣ

$$A+B+C=180°.$$

Если дана сторона a, то стороны b и c вычислимъ по формуламъ

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A},\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

84. Примѣръ.—*Дано*

$$A=81°47'12''{,}5,\ B=38°12'47''{,}5,\ C=60°,\ a=7012^m{,}24,$$

требуется вычислить стороны b и c, а также и площадь s треугольника.

ОБРАЗЕЦЪ ВЫЧИСЛЕНІЯ.

Вычисленіе стороны b.

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}.$$

$\log a$	3,8458568
$-\log\sin A$	0,0044774
$\log\sin B$	$\overline{1}$,7914024
$\log b$	3,6417366

$b=4382^m{,}65$

Вычисленіе стороны c.

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

$\log a$	3,8458568
$-\log\sin A$	0,0044774
$\log\sin C$	$\overline{1}$,9375306
$\log c$	3,7878648

$c=6135^m{,}71$

Вычисленіе площади s.

$$s=\tfrac{1}{2}\frac{a^2\sin B\sin C}{\sin A},$$

$2\log a$	7,6917136
$\log\sin B$	$\overline{1}$,7914024
$\log\sin C$	$\overline{1}$,9375306
$-\log\sin A$	0,0044774
$-\log 2$.	$\overline{1}$,6989700
$\log s$	7,1240940

$s=13307423$ квад. мет.

Рѣшеніе прямолинейнаго треугольника по даннымъ двумъ сторонамъ и углу, противолежащему одной изъ нихъ.

85. Если даны элементы a, b и A, то неизвѣстные элементы послѣдовательно опредѣлятся по формуламъ

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a},\quad A+B+C=180°,\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

Если B мало разнится отъ 90 градусовъ, то этотъ уголъ не можетъ быть опредѣленъ съ достаточною точностію по своему

синусу; въ этомъ случаѣ сперва вычисляютъ произведеніе $b\sin A$, а затѣмъ уже получаютъ уголъ B по формулѣ

$$tang\,B = \pm \frac{b\sin A}{\sqrt{(a+b\sin A)(a-b\sin A)}};$$

можно также воспользоваться формулой

$$tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}B) = \pm\sqrt{\frac{a+b\sin A}{a-b\sin A}},$$

которую получаютъ, замѣняя $sin\,B$ его значеніемъ въ уравненіи

$$tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}B) = \pm\sqrt{\frac{1+sin\,B}{1-sin\,B}}.$$

Впрочемъ, эти послѣднія формулы не даютъ возможности опредѣлить съ достаточной точностью уголъ B, когда онъ очень мало отличается отъ 90 градусовъ и данныя числа, какъ это чаще всего случается, не достаточно точны. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ, незначительная погрѣшность въ данныхъ элементахъ можетъ вызвать значительную погрѣшность при опредѣленіи угла B. (См. Главу VI, n° 230).

Замѣчаніе I.—Изъ таблицъ можно получить для B нѣкоторое значеніе $M<90^\circ$ только при условіи $a>b\sin A$; но можно также принять для $B=180^\circ-M$; будемъ имѣть два соотвѣтствующія значенія для C

$$C=180^\circ-A-M,\quad C=M-A,$$

и, слѣдовательно, также соотвѣтствующія два значенія и для c.

Чтобы уголъ M удовлетворялъ вопросу, необходимо и достаточно, чтобы $A+M$ было <180 градусовъ; точно также, чтобы уголъ $180^\circ-M$ отвѣчалъ вопросу, необходимо и достаточно, чтобы M было $> A$. Разсмотримъ, въ какомъ случаѣ эти условія могутъ быть выполнены.

1° Если $A=$ или >90 градусовъ, то значеніе B, равное $180^\circ-M$, не можетъ удовлетворять вопросу, и условіе, чтобы значеніе M могло удовлетворять вопросу, будетъ

$$M<180^\circ-A,$$

или, такъ какъ каждая изъ обѣихъ частей равенства меньше 90 градусовъ,

$$sin\,M<sin(180^\circ-A) \text{ или } <sin\,A,$$

то есть необходимо, чтобы имѣли:

$$\frac{sin\,A}{a}<sin\,A \text{ или } b<a.$$

Мы видимъ, что задача не можетъ имѣть больше одного рѣшенія и условіе необходимое для того, чтобы существовало рѣшеніе, состоитъ въ томъ, чтобы сторона, противолежащая данному углу, была большею изъ двухъ данныхъ сторонъ.

2° Если $A<90^\circ$, то значеніе B, равное M, всегда удовлетворяетъ вопросу; но, чтобы также можно было взять $B=180^\circ-M$, необходимо должно быть

$$M>A,$$

или, такъ какъ обѣ части равенства меньше 90 градусовъ,

$$sin\,M>sin\,A,$$

то есть

$$\frac{b\sin A}{a}>sin\,A, \text{ или } b<a.$$

Мы видимъ, что въ этомъ случаѣ, условіе возможности будетъ $a>b\sin A$; если это условіе выполнено, то задача допускаетъ одно или два рѣшенія, смотря по тому, будетъ ли сторона, противолежащая данному углу, больше или меньше другой данной стороны.

Полученные выводы вполнѣ согласны съ выводами, получаемыми при геометрическомъ изслѣдованіи, о которомъ мы считаемъ лишнимъ здѣсь говорить.

Замѣчаніе II.—Въ предыдущемъ рѣшеніи мы вычисляли сторону c только послѣ того, какъ получили углы B и C; но можетъ случиться, что, не имѣя надобности въ углахъ B и C, желаютъ непосредственно вычислить сторону c. Для этого можно воспользоваться формулою

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

откуда выводимъ

$$c=b\cos A\pm\sqrt{a^2-b^2\sin^2 A}.$$

Чтобы превратить эту формулу въ удобную для логариѳмированія, надо ввести вспомогательный уголъ, согласно способу, указанному въ n° 58, и тогда вычисленія, которыя придется выполнить, также продолжительны, какъ и тѣ, къ которымъ приводитъ примѣненіе перваго способа. Кромѣ того оказывается, что наиболѣе естественный пріемъ для преобразованія предыдущаго выраженія въ выраженіе удобное для логариѳмированія, состоящій въ томъ, что (n° 58) мы полагаемъ

$$\frac{b\sin A}{a}=\sin\varphi \text{ и, слѣдовательно, } b=\frac{a\sin\varphi}{\sin A},$$

такъ какъ тогда

$$c=\frac{a\sin\varphi\cos A}{\sin A}\pm a\cos\varphi=\frac{a\sin(\varphi\pm A)}{\sin A},$$

требуетъ опредѣленія вспомогательнаго угла φ, который равенъ B. И такъ, нѣтъ надобности видоизмѣнять данное нами рѣшеніе.

86. Примѣръ.—*Дано*

$$A=27°47'44'',77,\ a=2199^m,12,\ b=2513^m,28;$$

требуется вычислить B, C и c.

ОБРАЗЕЦЪ ВЫЧИСЛЕНІЯ.

Вычисленіе угла B.

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}.$$

$\log b$	3,4002409
$-\log a$	$\overline{4}$,6577511
$\log\sin A$	$\overline{1}$,6686853
$\log\sin B$	$\overline{1}$,7266773

Имѣемъ два рѣшенія

$$B=32°12'15'',23 \text{ и } B=147°47'44'',77.$$

ПЕРВОЕ РѢШЕНІЕ

$B=32°12'25'',23$

Вычисленіе угла C.

$C=180°-A-B$

$A=27°47'44'',77$
$B=32°12'15'',23$

$C=120°0'0''$

Вычисленіе стороны c.

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

$\log a$	3,3422489
$-\log\sin A$	0,3313147
$\log\sin C$	$\overline{1}$,9375306
$\log c$	3,6110942

$c=4084^m,08$

ВТОРОЕ РѢШЕНІЕ.

$B=147°47'44'',77$

Вычисленіе угла C.

$C=180°-A-B$

$A=27°47'44'',77$
$B=147°47'44'',77$

$C=4°24'30'',46$

Вычисленіе стороны c.

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

$\log a$	3,3422489
$-\log\sin A$	0,3313147
$\log\sin C$	$\overline{2}$,8857358
$\log c$	2,5592994

$c=362^m,493$

Рѣшеніе прямолинейнаго треугольника по даннымъ двумъ сторонамъ и углу между ними.

87. Первый способъ.—Пусть a, b, C будутъ данные элементы. Чтобы найти углы A и B, можно воспользоваться формулой (2) n° 73-го, а именно:

$$\tan g\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\cot\tfrac{1}{2}C;$$

изъ этой формулы можно опредѣлить полуразность

$$\tfrac{1}{2}(A-B)=M.$$

Съ другой стороны, имѣемъ

$$\tfrac{1}{2}(A+B)=90°-\tfrac{1}{2}C,$$

и отсюда, посредствомъ сложенія и вычитанія, найдемъ

$$A=90°-\tfrac{1}{2}C+M,$$
$$B=90°-\tfrac{1}{2}C-M.$$

Зная, такимъ образомъ, углы A и B, можно вычислить c по формулѣ

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A};$$

но лучше воспользоваться одною изъ формулъ (1) n° 73-го, а именно:

$$=\frac{(a+b)\sin\tfrac{1}{2}C}{\cos\tfrac{1}{2}(A-B)},\quad c=\frac{(a-b)\cos\tfrac{1}{2}C}{\sin\tfrac{1}{2}(A-B)},$$

для которыхъ нужно найти только два новыхъ логариѳма.

Если стороны a и b даны посредствомъ своихъ логариѳмовъ, то можно сократить вычисленіе дроби $\frac{a-b}{a+b}$, которая заключается въ выраженіи для $tang\frac{1}{2}(A-B)$. Для этого достаточно опредѣлить такой вспомогательный уголъ φ, чтобы

$$tang\varphi=\frac{a}{b};$$

ибо тогда получимъ

$$\frac{a-b}{a+b}=tang(\varphi-45°),$$

и, слѣдовательно,

$$tang\tfrac{1}{2}(A-B)=tang(\varphi-45°)cot\tfrac{1}{2}C.$$

Вычисленіе угловъ A и B оканчиваютъ, какъ показано выше; но, чтобы найти сторону c, надо взять формулу

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

Второй способъ. — Ту же самую задачу можно рѣшить при помощи формулъ

$$c\sin A=a\sin C,$$
$$c\cos A=b-a\cos C,$$

и, такимъ образомъ, получаемъ рѣшеніе болѣе простое, особенно, если, какъ это часто случается въ астрономіи, для a извѣстенъ логариѳмъ, тогда какъ b дано непосредственно. Изъ двухъ предыдущихъ уравненій получимъ для логариѳмическаго вычисленія

$$log(\pm tang A)=log a+log\sin C-log[\pm(b-a\cos C)],$$
$$log c=log a+log\sin C-log\sin A.$$

Чтобы найти $log[\pm(b-a\cos C)]$, надо вычислить логариѳмъ абсолютнаго значенія $a\cos C$, потомъ отыскать $a\cos C$, и затѣмъ, посредствомъ сложенія или вычитанія, $b-a\cos C$. Найдя уголъ A, получимъ уголъ B изъ равенства $A+B+C=180°$.

88. Примѣръ.—*Дано*

$log a=0{,}4287591$, $log b=0{,}0008764$, $C=78°28'7'',62$;

требуется вычислить углы A и B, сторону c и площадь s.

ОБРАЗЕЦЪ ВЫЧИСЛЕНІЯ (ПЕРВЫЙ СПОСОБЪ),

Вычисленіе $\varphi\left(tang\varphi=\frac{a}{b}\right)$.

$log a$	0,4287591
$log b$	0,0008764
$log tang\varphi$	0,4278827
$\varphi=$	69°31′36″,59
$\varphi-45°=$	24°31′36″,59

Вычисленіе угловъ A и B.

$tang\frac{1}{2}(A-B)=tang(\varphi-45°)cot\frac{1}{2}C.$

$log tang(\varphi-45°)$	$\bar{1}$,6592428
$log cot\frac{1}{2}C$	0,0880012
$log tang\frac{1}{2}(A-B)$	$\bar{1}$,7472440
$\frac{1}{2}(A-B)$	29°11′44″,75
$\frac{1}{2}(A+B)$	50°45′56″,19
$A=$	79°57′40″,84
$B=$	31°34′11″,44

Вычисленіе стороны c.

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

$\log a$	0,4287591
$\log \sin C$	$\bar{1}$,9911445
$-\log \sin A$	0,0067003
$\log c$	0,4266039

c=2,67057

Вычисленіе площади s.

$$s = \tfrac{1}{2} ab \sin C.$$

$\log a$	0,4287591
$\log b$	0,0008764
$\log \sin C$	$\bar{1}$,9911445
$-\log 2$	$\bar{1}$,6989700
$\log s$	0,1197500

s=1,3175

ОБРАЗЕЦЪ ВЫЧИСЛЕНІЯ (ВТОРОЙ СПОСОБЪ).

Начинаютъ съ вычисленія стороны b, которой данъ только одинъ логариѳмъ; находятъ b=1,002020.

Вычисленіе угла A.

$$\operatorname{tang} A = \frac{a \sin C}{b - a \cos C}.$$

$\log a$	0,4287591	$\log a$	0,4287591
$\log \cos C$	$\bar{1}$,3008167	$\log \sin C$	$\bar{1}$,9911445
		$-\log(b - a \cos C)$	0,3320687
$\log a \cos C$	$\bar{1}$,7295758		
$a \cos C$	0,5365075	$\log \operatorname{tang} A$	0,7519723
$b - a \cos C$	0,4655125	B=79°57′40″,95	

Для вычисленія c поступаютъ, какъ и въ первомъ способѣ; здѣсь нуженъ только одинъ новый логариѳмъ, а именно $\log \sin A$.

Рѣшеніе прямолинейнаго треугольника по даннымъ тремъ сторонамъ.

89. Формулы n° 70, которыя опредѣляютъ углы A, B, C въ функціяхъ сторонъ, не удобны для логариѳмированія, но формулы n° 74, которыя мы вывели изъ нихъ, удобны для логариѳмированія,

и потому онѣ могутъ быть взяты для вычисленія угловъ. Слѣдуетъ предпочесть формулы третьей системы, а именно:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

которыя опредѣляютъ углы $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}C$ по ихъ тангенсамъ.

Замѣчаніе.—Чтобы задача была возможна, необходимо и достаточно, чтобы каждая сторона была меньше суммы двухъ другихъ сторонъ; если это условіе не выполнено, то одна изъ разностей $p-a$, $p-b$, $p-c$ будетъ отрицательна, тогда какъ двѣ другія будутъ положительны, слѣдовательно, значенія $\operatorname{tang} \frac{1}{2}A$,.... будутъ мнимыя.

90. Примѣръ.—*Дано*

$$a = 701^m,224, \quad b = 438^m,265, \quad c = 613^m,571;$$

требуется вычислить углы A, B, C и площадь s.

ОБРАЗЕЦЪ ВЫЧИСЛЕНІЯ.

$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$	876,530	$\log p$	2,9427668
$p-a$	175,306	$\log(p-a)$	2,2437968
$p-b$	438,265	$\log(p-b)$	2,6417368
$p-c$	262,959	$\log(p-c)$	2,4198881

Вычисленіе угла A.

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

$\log(p-b)$	2,6417368
$\log(p-c)$	2,4198881
$-\log(p-a)$	$\bar{3}$,7562032
$-\log p$	$\bar{3}$,0572332
	$\bar{1}$,8750613
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} A$	$\bar{1}$,9375306
$\frac{1}{2}A$=40°53′36″,22	
A=81°47′12″,44	

Вычисленіе угла B.

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}.$$

$\log(p-a)$	2,2437968
$\log(p-c)$	2,4198881
$-\log(p-b)$	$\bar{3}$,3582632
$-\log p$	$\bar{3}$,0572332
	$\bar{1}$,0791813
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} B$	$\bar{1}$,5395906
$\frac{1}{2}B$=19° 6′23″,77	
B=38°12′47″,54	

Вычисленіе угла C.

$$tang\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

$log(p-a)$	2,2437968
$log(p-b)$	2,6417368
$-log(p-c)$	$\bar{3}$,5801119
$-log\,p$	$\bar{3}$,0572332
	$\bar{1}$,5228787
$log\,tang\tfrac{1}{2}C$	$\bar{1}$,7614393

$\frac{1}{2}C=30°$

$C=60°$

Вычисленіе площади s.

$$s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$log\,p$	2,9427668
$log(p-a)$	2,2437968
$log(p-b)$	2,6417368
$log(p-c)$	2,4198881
	10,2481885
$log\,s$	5,1240942

$s=133074{,}23$ кв. мет.

Повѣрка: $A+B+C=180°-0'',02$.

Различные случаи, когда даны не только стороны или углы треугольника.

91. Существуетъ множество задачъ на рѣшеніе треугольниковъ. Разсмотримъ нѣкоторыя изъ нихъ.

Задача I.—*Рѣшить треугольникъ, зная уголъ C, противолежащую сторону c и сумму или разность двухъ другихъ сторонъ a и b.*

Одна изъ формулъ (1) n° 73-го, а именно:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{cos\frac{1}{2}(A-B)}{sin\frac{1}{2}C},\quad \frac{a-b}{c}=\frac{sin\frac{1}{2}(A-B)}{cos\frac{1}{2}C},$$

даетъ возможность непосредственно найти полуразность $\frac{1}{2}(A-B)$; такъ какъ полусумма $\frac{1}{2}(A+B)$ извѣстна, то найдемъ также A и B; затѣмъ оканчиваютъ рѣшеніе при посредствѣ той изъ двухъ предыдущихъ формулъ, которая не служила для опредѣленія угловъ; она дастъ возможность опредѣлить $a-b$, если было дано $a+b$, или $a+b$, если было дано $a-b$.

92. Задача II.—*Рѣшить треугольникъ, зная уголъ B, прилежащую сторону a и сумму или разность двухъ другихъ сторонъ.*

Обозначивъ периметръ $a+b+c$ чрезъ $2p$, имѣемъ (74):

$$tang\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},\quad tang\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

откуда

$$tang\frac{C}{2}\,tang\frac{B}{2}=\frac{p-a}{p}\text{ и }tang\frac{C}{2}\,cot\frac{B}{2}=\frac{p-b}{p-c}.$$

Если сумма $b+c$ дана, то знаемъ p и $p-a$; если дана разность $b-c$, то знаемъ $p-b$ и $p-c$; слѣдовательно, въ томъ и другомъ случаѣ, можно вычислить уголъ C при посредствѣ одной изъ предыдущихъ формулъ. Затѣмъ продолжаютъ рѣшеніе по способу n° 83, или же при посредствѣ любой изъ формулъ, получаемыхъ изъ предыдущихъ чрезъ перестановку буквъ A и B, a и b.

93. Задача III.—*Рѣшить треугольникъ, зная его площадь s и углы.*

Имѣемъ (75)

$$s=\tfrac{1}{2}a^2\frac{sin\,B\,sin\,C}{sin\,A},\text{ откуда }a=\sqrt{\frac{2s\,sin\,A}{sin\,B\,sin\,C}}.$$

Стороны b и c вычислимъ при посредствѣ аналогичныхъ формулъ.

94. Задача IV.—*Рѣшить треугольникъ, зная его периметръ и углы.*

Изъ формулъ (3) и (4) n° 74 выводимъ

$$cos\tfrac{1}{2}B\,cos\tfrac{1}{2}C=\frac{p}{a}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}=\frac{p}{a}sin\tfrac{1}{2}A,$$

и, слѣдовательно,

$$a=\frac{p\,sin\frac{1}{2}A}{cos\frac{1}{2}B\,cos\frac{1}{2}C};$$

послѣдняя формула будетъ намъ служить для вычисленія a.

95. Задача V.—*Рѣшить треугольникъ, зная радіусъ круга вписаннаго r и углы.*

Изъ формулъ, данныхъ нами прежде, легко выводимъ

$$p-a=r\,cot\tfrac{1}{2}A,\ p-b=r\,cot\tfrac{1}{2}B,\ p-c=r\,cot\tfrac{1}{2}C;$$

при посредствѣ этихъ формулъ найдемъ $p-a$, $p-b$ и $p-c$, а затѣмъ стороны a, b, c.

*

Задача VI.—*Рѣшить треугольникъ, зная уголъ C и суммы $c+a$, $c+b$, получаемыя отъ прибавленія противолежащей стороны c къ каждой изъ двухъ другихъ сторонъ.*

Предположимъ, что $c+a>c+b$. Формулы (1) n° 73 даютъ

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{(c+a)+(c+b)}{c}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)+2\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}C}, \\ \dfrac{(c+a)-(c+b)}{c}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}, \end{cases}$$

откуда

$$(2)\qquad \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)+2\sin\frac{1}{2}C}=\frac{(c+a)-(c+b)}{(c+a)+(c+b)}\cot\tfrac{1}{2}C.$$

Эта формула (2) содержитъ только одно неизвѣстное число: $\frac{1}{2}(A-B)$, которое можно опредѣлить по способу n° 60, вычисливъ вспомогательный уголъ φ, заключающійся между нулемъ и 90 градусами, при помощи формулы

$$(3)\qquad tang\varphi=\frac{(c+a)-(c+b)}{(c+a)+(c+b)}\cot\tfrac{1}{2}C.$$

Но если будемъ разсматривать треугольникъ, образованный сторонами $c+a$, $c+b$ и заключающимся между ними угломъ C, и обозначимъ чрезъ A' уголъ, противолежащей сторонѣ $c+a$ въ этомъ треугольникѣ, и чрезъ B' уголъ, противолежащій сторонѣ $c+b$, то полуразность $\frac{1}{2}(A'-B')$, въ силу формулы (2) n° 73, будетъ въ точности равна вспомогательному углу φ; такимъ образомъ, будемъ имѣть

$$\frac{A'-B'}{2}=\varphi,\quad \frac{A'+B'}{2}=90^\circ-\tfrac{1}{2}C,$$

откуда

$$(4)\qquad A'=90^\circ-\tfrac{1}{2}C+\varphi,\quad B'=90^\circ-\tfrac{1}{2}C-\varphi.$$

Послѣ этого уравненіе (2) можетъ быть написано такъ

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)+2\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A'-B')}{\cos\frac{1}{2}(A'-B')};$$

освободившись отъ знаменателей, найдемъ

$$(5)\qquad \sin x=2\sin\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}(A'-B'),$$

гдѣ, для краткости, мы приняли

$$\frac{A-B}{2}-\frac{A'-B'}{2}=x$$

но такъ какъ

$$\frac{A+B}{2}-\frac{A'+B'}{2}=0$$

то изъ двухъ предыдущихъ уравненій получимъ

$$(6)\qquad A=A'+x,\quad B=B'-x.$$

Уголъ x вычислимъ по формулѣ (5), послѣ чего формулы (6) опредѣлятъ A и B, такъ какъ A' и B' извѣстны.

Для вычисленія c беремъ второе изъ уравненій (1), которое даетъ

$$(7)\qquad c=\frac{[(c+a)-(c+b)]\cos\frac{1}{2}C}{\sin(\varphi+x)},$$

и, наконецъ, a и b получаются изъ формулъ

$$(8)\qquad a=(c+a)-c,\quad b=(c+b)-c.$$

Вспомогательный треугольникъ, который мы брали, всегда возможенъ, каковы бы ни были данныя $c+a$, $c+b$, C; отсюда слѣдуетъ, что уравненіе (5) всегда дастъ вещественныя значенія для x, такъ какъ оно можетъ быть представлено въ такой формѣ:

$$(9)\qquad \sin x=\sin A'-\sin B',$$

откуда видимъ, что его вторая часть заключается между нулемъ и 1. Это уравненіе имѣетъ только одинъ корень x, заключающійся между нулемъ и 90 градусами; и только этотъ корень можетъ соотвѣтствовать нашей задачѣ, такъ какъ уголъ B' острый (потому что $A'>B'$) и, слѣдовательно, значеніе B, получаемое изъ второго уравненія (6), можетъ быть положительнымъ только тогда, когда x меньше 90 градусовъ. Кромѣ того видимъ, что предложенная задача возможна только тогда, когда значеніе x, заключающееся между нулемъ и 90 градусами, меньше B'; это условіе можемъ выразить посредствомъ неравенства $\sin x<\sin B'$ или, принимая во вниманіе уравненіе (9), посредствомъ неравенства

$$\sin A'<2\sin B',$$

а послѣднее неравенство равносильно слѣдующему:

$$(c+a)<2(c+b).$$

Таково условіе, необходимое для того, чтобы задача была возможна; я говорю, что это условіе и достаточное. Въ самомъ дѣлѣ, если оно выполнено, то значенія A и B будутъ положительны; сверхъ того ихъ сумма будетъ меньше 180 градусовъ; значеніе c, получаемое изъ уравненія (7), будетъ положительное, и очевидно, что эти значенія обращаютъ уравненія (1) въ тождества. Послѣ этого, положимъ, что требуется рѣшить треугольникъ по вычисленнымъ нами элементамъ A, B, c; эта задача всегда возможна, и, для ея рѣшенія, можемъ очевидно воспользоваться уравненіями (1), изъ которыхъ получимъ данныя значенія $c+a$, $c+b$.

Примѣчаніе. — Если имѣемъ $c+a=c+b$, то углы φ и x обращаются въ нули, и тогда $A=B=A'=B'$. Въ этомъ случаѣ, формула (7) не можетъ болѣе служить для вычисленія c; тогда надо обратиться къ первому изъ уравненій (1), которое даетъ

$$c=(c+a)\frac{\sin\frac{1}{2}C}{\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{2}C},$$

откуда

$$\frac{c-a}{c+a}=\frac{\sin\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}}{\sin\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}}=\frac{tang(\frac{1}{4}C-15^\circ)}{tang(\frac{1}{4}C+15^\circ)}.$$

Слѣдовательно, будемъ имѣть

$$c-a=(c+a)\frac{tang(\frac{1}{4}C-15^\circ)}{tang(\frac{1}{4}C+15^\circ)};$$

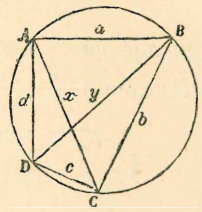
эта формула даетъ $c-a$; затѣмъ изъ нея опредѣлимъ a и c.

О вписанномъ четыреугольникѣ.

97. Мы считаемъ не лишнимъ показать здѣсь, какимъ образомъ можно вычислить углы, площадь и діагонали вписаннаго четыреугольника, когда даны его четыре стороны.

Пусть данъ вписанный четыреугольникъ $ABCD$ (фиг. 19),

Фиг. 19.



котораго стороны AB, BC, CD, DA обозначимъ чрезъ a, b, c, d, діагонали AC и BD чрезъ x и y, площадь чрезъ s, радіусъ круга описаннаго чрезъ R, а углы — буквами, которыми обозначены ихъ вершины.

Такъ какъ углы B и D пополнительны, то ихъ косинусы равны, но съ противоположными знаками, почему изъ треугольниковъ ABC и ACD имѣемъ

$$(1)\qquad \begin{cases} x^2=a^2+b^2-2ab\cos B, \\ x^2=c^2+d^2+2cd\cos B, \end{cases}$$

и, исключивъ x изъ этихъ уравненій, получимъ

$$(2)\qquad \cos B=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}.$$

Эта формула не удобна для логариѳмированія, но изъ нея можно получить формулу, удобную для логариѳмированія. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ

$$\sin^2\tfrac{1}{2}B=\frac{1-\cos B}{2},\quad \cos^2\tfrac{1}{2}B=\frac{1+\cos B}{2};$$

замѣняя $\cos B$ его значеніемъ, найдемъ

$$\sin^2\tfrac{1}{2}B=\frac{(c+d)^2-(a-b)^2}{4(ab+cd)}=\frac{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)}{4(ab+cd)},$$
$$\cos^2\tfrac{1}{2}B=\frac{(a+b)^2-(c-d)^2}{4(ab+cd)}=\frac{(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{4(ab+cd)}.$$

Обозначивъ периметръ $a+b+c+d$ чрезъ $2p$, будемъ имѣть $a+b+c-d=2(p-d)$,.... и, слѣдовательно,

$$(3)\qquad \sin\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab+cd}},\quad \cos\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-c)(p-d)}{ab+cd}}.$$

Дѣля формулы (3) одну на другую, получимъ слѣдующую

$$(4) \qquad tang\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}},$$

которая будетъ удобна для логариѳмированія.

Точно такъ же для вычисленія угла A будемъ имѣть

$$(5) \qquad tang\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}.$$

Такъ какъ углы четыреугольника извѣстны, то діагонали опредѣлимъ однимъ изъ способовъ n° 87. Что же касается до площади s, то она равна суммѣ площадей треугольниковъ ABC и ADC, почему будемъ имѣть (n° 75)

$$s=\tfrac{1}{2}(ab+cd)\sin B;$$

но, перемножая между собою уравненія (3), найдемъ

$$\sin B=2\frac{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab+cd};$$

слѣдовательно,

$$(6) \qquad s=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Если предположимъ, что сторона d равна нулю, то эта формула обратится въ формулу, выражающую площадь треугольника въ функціи трехъ его сторонъ.

Если желаемъ непосредственно вычислить діагонали x и y, то подставимъ въ одно изъ уравненій (1) вмѣсто $\cos B$ его значеніе, полученное изъ уравненія (2); тогда получимъ

$$x^2=\frac{cd(a^2+b^2)+ab(c^2+d^2)}{ab+cd}$$

или

$$(7) \qquad x^2=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd};$$

точно такъ же будемъ имѣть

$$(8) \qquad y^2=\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc};$$

но эти формулы (7) и (8) не удобны для вычисленія при посредствѣ логариѳмовъ.

Умножая и дѣля уравненія (7) и (8) одно на другое, найдемъ формулы

$$(9) \qquad xy=ac+bd,\ \frac{x}{y}=\frac{ad+bc}{ab+cd},$$

которыя выражаютъ двѣ извѣстныя теоремы геометріи.

Мы можемъ, наконецъ, выразить радіусъ R круга описаннаго въ функціи четырехъ сторонъ. Дѣйствительно, имѣемъ (n° 76)

$$R=\frac{x}{2\sin B},$$

откуда

$$(10) \qquad R=\frac{\sqrt{(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc)}}{4\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}.$$

Дѣйствія на мѣстности.

98. Триангуляція.—Если хотятъ съ нѣкоторою точностію снять планъ какой нибудь мѣстности, города и проч., то необходимо, чтобы *съемка* основывалась на *триангуляціи*. Такъ называютъ дѣйствіе, посредствомъ котораго опредѣляютъ значенія всѣхъ элементовъ ряда или *сѣти* треугольниковъ, расположенныхъ одинъ возлѣ другого и связанныхъ другъ съ другомъ точками, по желанію выбранными на мѣстности. Однако, если мѣстность не совсѣмъ горизонтальна, что чаще всего встрѣчается, то должно представить себѣ, что сѣть проектирована на горизонтальную плоскость, расположенную внизу; такъ какъ элементы этой проэкціи или, какъ говорятъ, сѣти, приведенной къ горизонту, весьма важно знать, то и опредѣляютъ ихъ.

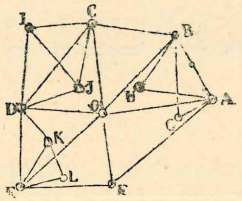
Всѣ углы треугольниковъ измѣряются при помощи *графометра*, или лучше *тэодолита*, который даетъ углы приведенными къ горизонту. Но только одна изъ линій измѣряется непосредственно *межевой цѣпью*; ее называютъ *базисомъ*. Другія стороны треугольниковъ опредѣляются вычисленіемъ.

Весьма важно умѣло выбрать точки, которыя должны образовать тригонометрическую сѣть, чтобы имѣть треугольники только удобные, т. е. такіе, у которыхъ ни одинъ изъ угловъ не былъ бы слишкомъ

близкимъ къ нулю. Дѣйствительно, легко видѣть, что положеніе точки не вполнѣ точно опредѣляется, если она дана пересѣченіемъ двухъ прямыхъ, составляющихъ между собою слишкомъ малый уголъ, такъ какъ въ этомъ случаѣ весьма незначительная ошибка въ величинѣ угла можетъ сказаться относительно большой ошибкой въ расположеніи точки. Вотъ общепринятый способъ.

Изучивъ мѣстность, которую предположено снять, выбираютъ на ней центральную точку O (фиг. 20), которую можно видѣть на даль-

Фиг. 20.



немъ разстояніи, какъ, напр., шпицъ колокольни или сигналъ, помѣщенный на высокомъ зданіи, или даже простой шестъ съ сигналомъ, если мѣстность открыта. Затѣмъ выбираютъ, въ предѣлахъ съемки пять, шесть или болѣе точекъ A, B, C, D, E, F, изъ которыхъ можно было бы видѣть точку O, и притомъ такихъ, чтобы треугольники ABO, BCO,.. получились выгодные. Важно также, чтобы одна изъ сторонъ многоугольника $ABCDEF$, напримѣръ AB, могла быть измѣрена непосредственно и принята за базисъ.

Измѣривъ сторону многоугольника AB и обозначивъ его вершины вѣхами или какими нибудь другими знаками, останавливаются послѣдовательно въ каждой изъ его вершинъ. Въ точкѣ A измѣряютъ углы OAF и OAB, въ точкѣ B — углы OBA и OBC,..., наконецъ, въ послѣдней вершинѣ F углы OFE и OFA. Изъ этихъ измѣреній легко опредѣляютъ каждый изъ угловъ при точкѣ O, которыхъ нѣтъ тогда надобности измѣрять непосредственно, лишь бы только разсматриваемые углы были опредѣлены съ достаточною точностью. Въ этой точности убѣдимся, сложивъ всѣ разсмотрѣнные углы и сравнивъ эту сумму съ суммою угловъ многоугольника, которая наперед извѣстна. (Если многоугольникъ будетъ шестиугольникъ, какъ на фигурѣ, то сумма его угловъ равна $180^\circ \times 4$ или

720 градусамъ). Разность между двумя этими суммами, раздѣленная на удвоенное число сторонъ многоугольника, будетъ средней погрѣшностью наблюденій. Если эта средняя погрѣшность превосходитъ погрѣшность, которую можно ожидать отъ употребляемаго инструмента, то должно снова начать измѣренія; въ противномъ случаѣ, можно считать измѣренія точными и не прибѣгать къ непосредственному измѣренію угловъ при O; но тогда исправляютъ разсмотрѣнные углы, увеличивая или уменьшая каждый изъ нихъ на среднюю погрѣшность, о которой мы только что говорили.

Послѣ того, какъ сдѣланы измѣренія и поправки, о которыхъ мы только что говорили, остается рѣшить треугольники. Изъ перваго треугольника ABO, въ которомъ извѣстна сторона AB и углы, опредѣлимъ стороны AO и BO (первый случай косоугольныхъ треугольниковъ); изъ второго треугольника BCO, въ которомъ теперь знаемъ сторону OB и углы, найдемъ BC и CO; изъ третьяго CD и DO,..., наконецъ, изъ послѣдняго найдемъ FA и AO. Здѣсь имѣемъ средство для повѣрки вычисленій, такъ какъ значеніе стороны AO, получаемое изъ послѣдняго треугольника, должно быть то же, что и получаемое изъ перваго.

Эта первая сѣть треугольниковъ составляетъ то, что называютъ *главною сѣтью*. Всѣ стороны этой сѣти, въ свою очередь, могутъ служить базисами для сниманія другихъ точекъ, и такъ какъ онѣ расположены въ различныхъ направленіяхъ, то всегда возможно получить треугольники только выгодные. Такимъ образомъ снимемъ точки G и H въ зависимости отъ стороны AB: измѣряемъ углы треугольниковъ ABG и ABH только при A и B, а потомъ вычисляемъ стороны этихъ треугольниковъ. Подобнымъ же образомъ снимемъ точки I и J въ зависимости отъ стороны CD главнаго многоугольника, а точку K—отъ стороны ED. Наконецъ, вычисливъ стороны этихъ вторичныхъ треугольниковъ, можемъ ихъ принять за базисы; напр., можно снять точку L въ зависимости отъ стороны EK.

Если бы природа мѣстности не позволяла принять за базисъ одну изъ сторонъ главнаго многоугольника, то тогда должно измѣрить гдѣ нибудь на мѣстности такой базисъ, чтобы его можно было соединить съ одной изъ этихъ сторонъ, напримѣръ съ AB, однимъ или,

самое большее, двумя треугольниками. Рѣшая эти треугольники, опредѣлимъ сторону AB, и затѣмъ продолжимъ измѣреніе, какъ если бы сторона AB была измѣрена непосредственно.

Часто за главный многоугольнихъ принимаютъ простой треугольникъ, и за базисъ одну изъ его сторонъ. Въ этомъ случаѣ три угла измѣряютъ непосредственно; если сумма измѣренныхъ угловъ разнится отъ 180 градусовъ, то берутъ треть разности между этою суммою и 180 градусами: это будетъ средней погрѣшностью трехъ измѣреній. Если эта средняя погрѣшность допустима, то разсмотрѣнные углы исправляютъ, какъ выше было сказано, а потомъ рѣшаютъ треугольникъ. Когда три стороны найдены, то можно снять всѣ желаемыя точки на мѣстности въ зависимости отъ одной изъ сторонъ этого треугольника.

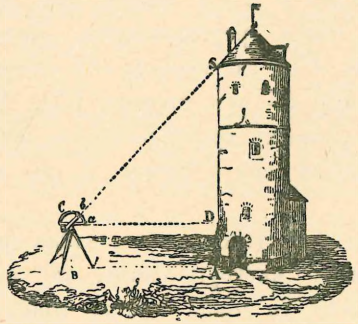
Въ заключеніе, разсмотримъ нѣкоторые вопросы, которые часто представляются при межеваніи и при съемкѣ плановъ. Во всѣхъ этихъ вопросахъ данными будутъ базисъ, который можно измѣрить цѣпью, и углы, для измѣренія которыхъ можно употребить обыкновенный графометръ.

Задачи практической тригонометріи.

99. Задача I.—*Найти высоту башни, къ подножью которой можно подойти и основаніе которой находится на мѣстности почти горизонтальной.*

Пусть будетъ S (фиг. 21) вершина башни и SA ея высота. По-

Фиг. 21.



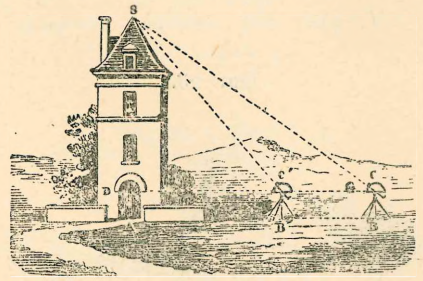
мѣщаютъ графометръ въ такомъ мѣстѣ, чтобы разстояніе его отъ

башни, не было ни слишкомъ велико и ни слишкомъ мало сравнительно съ высотою башни. Приводятъ *лимбъ* въ вертикальное положеніе, такъ чтобы его плоскость проходила чрезъ вершину башни, а діаметръ былъ бы горизонталенъ. Затѣмъ вращаютъ *алидаду* до тѣхъ поръ, пока на срединѣ волосковъ ея *діоптровъ* или ея зрительной трубы не увидятъ вершины башни S, и отсчитываютъ дугу ab лимба, заключающуюся между горизонтальнымъ діаметромъ и алидадою; это будетъ уголъ C прямоугольнаго треугольника SCD. Затѣмъ отмѣчаютъ на мѣстности, помощію отвѣса, проекцію B центра инструмента; начиная отъ точки B проводятъ *прямую линію*, по направленію діаметра Ca, и измѣряютъ при помощи цѣпи горизонтальное разстояніе BA, считаемое по этому направленію отъ точки B до башни. Такъ какъ $CD=BA$, то въ прямоугольномъ треугольникѣ SCD будемъ знать сторону CD и острый уголъ SCD; слѣдовательно, можно вычислить сторону SD, а придавъ къ ней AD или BC, т. е. высоту графометра, получимъ искомую высоту.

100. Задача II.—*Найти высоту башни, къ подножію которой подойти нельзя, но которой основаніе находится на мѣстности почти горизонтальной.*

Пусть будетъ AS (фиг. 22) высота башни, къ основанію кото-

Фиг. 22.



рой подойти нельзя. Помѣщаютъ графометръ въ нѣкоторомъ мѣстѣ B и, какъ и въ предыдущей задачѣ, устанавливаютъ лимбъ вертикально, такъ чтобы его діаметръ былъ горизонталенъ и чтобы его плоскость проходила чрезъ вершину S. Направляютъ алидаду инструмента на вершину S и опредѣляютъ уголъ SCD. Затѣмъ проводятъ прямую линію BB', по направленію горизонтальнаго діа-

метра Ca, и переносятъ графометръ параллельно самому себѣ такъ, чтобы его центръ имѣлъ проэкціею точку B'; тогда снова направляютъ алидаду инструмента на точку S и опредѣляютъ уголъ $SC'D$. Наконецъ, измѣряютъ при помощи цѣпи линію $BB'=CC'$.

Послѣ этого, изъ треугольника SCC' имѣемъ

$$\frac{SC}{BB'}=\frac{\sin SC'D}{\sin(SC'D-SCD)},\text{ откуда }SC=\frac{BB'\sin SC'D}{\sin(SC'D-SCD)};$$

изъ прямоугольнаго же треугольника SCD получимъ

$$SD=SC\sin SCD;$$

слѣдовательно,

$$SD=\frac{BB'\sin SCD\sin SC'D}{\sin(SC'D-SCD)}.$$

Вычисляемъ SD по формулѣ:

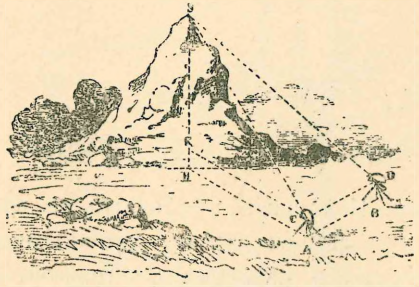
$$\log SD=\log BB'+\log\sin SCD+\log\sin SC'D-\log\sin(SC'D-SCD),$$

и, придавъ затѣмъ къ результату высоту графометра, найдемъ искомую высоту.

101. Задача III. — *Найти высоту горы.*

Пусть будетъ SH (фиг. 23) высота, которую требуется измѣ-

Фиг. 23.



рить. Выбираютъ двѣ такія точки A и B, разстояніе которыхъ можно было бы легко измѣрить цѣпью и изъ которыхъ одна, напр.

A, была бы почти въ горизонтальной плоскости основанія высоты SH. Помѣщаютъ графометръ въ точкѣ A такимъ образомъ, чтобы центръ лимба находился въ точкѣ C на вертикали точки A, и затѣмъ вбиваютъ въ B шестъ съ сигналомъ D; потомъ поворачиваютъ лимбъ такъ, чтобы его плоскость проходила черезъ точку S и сигналъ D; измѣряютъ тогда уголъ SCD, направляя поочередно алидаду на точку S и на сигналъ D; затѣмъ, не перемѣщая ножекъ инструмента, устанавливаютъ лимбъ вертикально, такимъ образомъ, чтобы его діаметръ былъ горизонталенъ и чтобы его плоскость постоянно проходила чрезъ точку S; направляютъ алидаду на точку S и опредѣляютъ уголъ SCK, образуемый алидадою съ діаметромъ лимба. Наконецъ, переносятъ инструментъ во вторую точку такъ, чтобы его центръ занялъ мѣсто точки D, имѣющей проэкціею точку B, и вбиваютъ въ точкѣ A шестъ, бывшій въ точкѣ B, и потомъ, поступая какъ и раньше, измѣряютъ уголъ SDC.

Измѣривъ цѣпью, какъ выше было сказано, базисъ $AB=CD$ будемъ знать сторону CD и углы треугольника SCD; изъ этого треугольника имѣемъ

$$SC=\frac{AB\sin SDC}{\sin CSD};$$

потомъ, изъ прямоугольнаго треугольника CSK,

$$SK=SC\sin SCK,$$

слѣдовательно,

$$SK=\frac{AB\sin SDC\sin SCK}{\sin CSD}$$

и

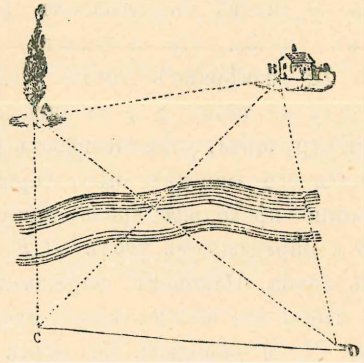
$$\log SK=\log AB+\log\sin SDC+\log\sin SCK-\log\sin CSD.$$

При помощи этой формулы вычисляютъ SK, и, прибавивъ затѣмъ къ полученному результату высоту графомера $AC=KH$, получаютъ искомую высоту.

102. Задача IV. — *Найти разстояніе между двумя точками, изъ которыхъ одна недоступна.*

Пусть C будетъ точка (фиг. 24), въ которой наблюдатель мо-

Фиг. 24.



жетъ помѣститься, A—недоступная точка, и AC искомое разстояніе. Начиная отъ точки C, измѣряютъ цѣпью какой нибудь базисъ CD; затѣмъ измѣряютъ при помощи графометра углы ACD и ADC, при посредствѣ которыхъ выводятъ значеніе угла CAD; наконецъ, сторону AC вычисляютъ по формулѣ

$$AC = \frac{CD \sin ADC}{\sin CAD}.$$

103. Задача V. — *Найти разстояніе между двумя недоступными точками.*

Пусть будутъ A и B (фиг. 24) двѣ недоступныя точки, разстояніе между которыми требуется опредѣлить.

Въ той части мѣстности, въ которой можно помѣститься, измѣряютъ цѣпью базисъ CD; потомъ измѣряютъ при помощи графометра пять угловъ BDC, ADC, ACD, BCD и ACB. Затѣмъ въ треугольникахъ ACD и BCD, въ которыхъ будемъ знать сторону CD и углы, можно вычислить стороны AC и BC. Послѣ этого, въ треугольникѣ ACB будемъ знать уголъ C и двѣ стороны, между которыми онъ заключается; слѣдовательно, можно вычислить сторону AB, и вопросъ, такимъ образомъ, будетъ рѣшенъ.

Вотъ какъ можно проще всего произвести вычисленіе. Обозначимъ, какъ и всегда, чрезъ A, B, C углы треугольника ABC, а чрезъ

a, b, c соотвѣтственно противолежащія имъ стороны; кромѣ того положимъ $CD=d$. Изъ треугольниковъ BCD и ACD соотвѣтственно имѣемъ

$$a = \frac{d \sin BDC}{\sin CBD}, \quad b = \frac{d \sin ADC}{\sin CAD},$$

откуда

$$\log a = \log d + \log \sin BDC - \log \sin CBD,$$
$$\log b = \log d + \log \sin ADC - \log \sin CAD.$$

Если теперь обозначимъ чрезъ φ такой вспомогательный уголъ, чтобы

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{a}{b},$$

то изъ треугольника ABC получимъ (n° 87)

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A-B) = \operatorname{tang}(\varphi - 45^\circ) \cot \tfrac{1}{2} C.$$

Уголъ φ опредѣлится по формулѣ

$$\log \operatorname{tang} \varphi = \log a - \log b,$$

или

$$(1) \quad \begin{cases} \log \operatorname{tang} \varphi = \log \sin BDC + \log \sin CAD \\ \qquad\qquad - \log \sin CBD - \log \sin ADC; \end{cases}$$

затѣмъ уголъ $\frac{1}{2}(A-B)$ получится по формулѣ

$$(2) \quad \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A-B) = \log \operatorname{tang}(\varphi - 45^\circ) + \log \cot \tfrac{1}{2} C.$$

Зная $A-B$ и $A+B$, можемъ вычислить уголъ A и, наконецъ, получить искомое разстояніе при посредствѣ формулы

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

откуда найдемъ

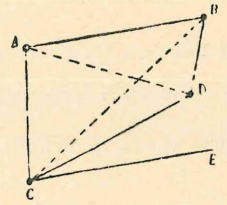
$$(3) \quad \begin{cases} \log c = \log d + \log \sin BDC - \log \sin CBD \\ \qquad\qquad + \log \sin C - \log \sin A. \end{cases}$$

Замѣчаніе.—Необходимо, какъ мы сказали, непосредственно измѣрить уголъ ACB, ибо этотъ уголъ только въ очень рѣдкихъ случаяхъ равенъ разности угловъ ACD и BCD, а именно, когда четыре точки A, B, C, D находятся въ одной плоскости.

104. Задача VI.—*Чрезъ доступную точку на ровной мѣстности провести прямую, параллельную недоступной прямой.*

Пусть будетъ C (фиг. 25) доступная точка и AB недоступная

Фиг. 25.

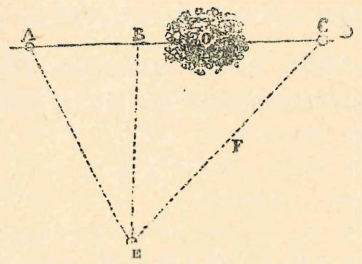


прямая; для вычисленія угла CAB поступаютъ, какъ и въ предыдущей задачѣ. Опредѣливъ этотъ уголъ, помѣщаютъ графометръ въ C такъ, чтобы діаметръ лимба былъ направленъ по CA, и затѣмъ поворачиваютъ алидаду до тѣхъ поръ, пока дуга лимба, считая отъ діаметра, не будетъ равна пополненію угла CAB; наконецъ, проводятъ, при посредствѣ вѣхъ, прямую по направленію алидады и, такимъ образомъ, получаютъ искомую линію CE.

105. Задача VII.—*Продолжить линію на мѣстности за препятствіе, мѣшающее видѣть направленіе этой линіи.*

Пусть AB (фиг. 26) будетъ прямая, продолженіе которой тре-

Фиг. 26.



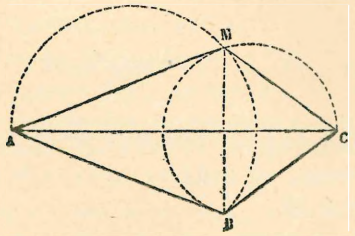
буется провести по другую сторону препятствія O. Измѣряютъ цѣпью линію AB; потомъ выбираютъ точку E, которую можно видѣть изъ точекъ A и B, и изъ которой была бы видна мѣстность, заключающая продолженіе AB. Измѣряютъ углы A и B треугольника ABE и вычисляютъ сторону AE; начиная отъ точки E, проводятъ прямую EF по направленію къ той части мѣстности, которая находится по другую сторону препятствія O. Измѣряютъ уголъ AEF; если C обозначаетъ пересѣченіе прямой EF съ продолженіемъ AB, то въ треугольникѣ ACE будемъ знать сторону AE и углы; слѣдовательно, мы можемъ вычислить EC и затѣмъ опредѣлить на мѣстности помощью цѣпи точку C; наконецъ, проведя продолженіе линіи CD, которое образуетъ съ EC уголъ равный пополненію ACE, получимъ искомое продолженіе.

Если прямая AB недоступна, то, чтобы измѣрить элементы треугольника ABE, мы воспользуемся, какъ въ задачѣ V-ой, вспомогательнымъ базисомъ, проведеннымъ чрезъ точку E.

106. Задача VIII.—*Три точки A, B, C (фиг. 27) расположены на ровной мѣстности и нанесены на карту; опредѣлить на картѣ точку M, изъ которой разстоянія AB и BC видимы подъ углами α и β, которые измѣрены.*

Точка M находится на пересѣченіи сегментовъ, вмѣщающихъ

Фиг. 27.



углы α и β и построенныхъ соотвѣтственно на AB и BC; но здѣсь требуется опредѣлить положеніе этой точки на картѣ въ зависимости отъ элементовъ, находящихся при точкахъ A, B, C.

Пусть $AB=a$, $BC=b$; примемъ за неизвѣстные углы $MAB=x$ и $MCB=y$. Изъ треугольниковъ AMB и CMB имѣемъ

$$BM=\frac{a\sin x}{\sin\alpha},\quad BM=\frac{b\sin y}{\sin\beta},$$

откуда

$$\frac{a\sin x}{\sin\alpha}=\frac{b\sin y}{\sin\beta}\quad\text{и, слѣдовательно,}\quad\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}.$$

*

Пусть φ будетъ такой вспомогательный уголъ, чтобы

$$tang\varphi = \frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta};$$

будемъ имѣть

$$\frac{\sin x}{\sin y} = tang\varphi,$$

откуда

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{tang\varphi - 1}{tang\varphi + 1},$$

или (n° 18)

$$\frac{tang\frac{1}{2}(x-y)}{tang\frac{1}{2}(x+y)} = \frac{tang\varphi - tang45^\circ}{1 + tang\varphi\, tang45^\circ} = tang(\varphi - 45^\circ).$$

Кромѣ того, обозначивъ чрезъ ω уголъ ABC, имѣемъ

$$\tfrac{1}{2}(x+y) = 180^\circ - \frac{\alpha+\beta+\omega}{2},$$

слѣдовательно,

$$tang\tfrac{1}{2}(x-y) = tang(\varphi - 45^\circ)\, tang\left(180^\circ - \frac{\alpha+\beta+\omega}{2}\right).$$

При помощи этой формулы вычислимъ уголъ $\frac{1}{2}(x-y)$, а такъ какъ уголъ $\frac{1}{2}(x+y)$ извѣстенъ, то найдемъ углы x и y, которые опредѣлятъ положеніе точки M.

Замѣчаніе.—Если одинъ изъ сомножителей выраженія $tang\frac{1}{2}(x-y)$ равенъ нулю, а другой не ∞, то углы x и y равны между собою. Но если второй сомножитель ∞, то первый равенъ нулю, и значеніе для $tang\frac{1}{2}(x-y)$ приметъ видъ $0.\infty$. Можно убѣдиться, что въ этомъ случаѣ задача дѣйствительно неопредѣленна. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы сомножитель

$$tang\left(180^\circ - \frac{\alpha+\beta+\omega}{2}\right)$$

былъ равенъ безконечности, необходимо, чтобы

$$\alpha+\beta+\omega = 180^\circ,$$

а это будетъ условіемъ, при которомъ четыреугольникъ $ABCM$ можно вписать въ кругъ; слѣдовательно, въ разсматриваемомъ нами случаѣ, два сегмента, вмѣщающіе углы α и β, пересѣченіе которыхъ опредѣляетъ точку M, совпадутъ. Тогда сомножитель $tang(\varphi - 45^\circ)$ равенъ нулю; дѣйствительно, $tang\varphi = \frac{b}{\sin\beta} : \frac{a}{\sin\alpha}$; но $\frac{b}{\sin\beta}$ и $\frac{a}{\sin\alpha}$ суть діаметры круговъ, описанныхъ около треугольниковъ ABM и BCM (n° 76), и такъ какъ эти два круга совпадаютъ, то $tang\varphi = 1$, почему $\varphi = 45^\circ$ и $tang(\varphi - 45^\circ) = 0$.

Упражненія.

I. Каковъ долженъ быть радіусъ круга, чтобы разность между дугою въ 10 метровъ и ея хордою была меньше 1 миллиметра?

II. Рѣшить треугольникъ, зная его основаніе, высоту и разность угловъ при основаніи.

III. Рѣшить треугольникъ, зная три его высоты.

IV. Рѣшить треугольникъ, зная радіусы круговъ извнѣвписанныхъ.

V. Вычислить площадь трапеціи, зная четыре ея стороны.

VI. Построить равносторонній треугольникъ, котораго вершины лежатъ на трехъ концентрическихъ окружностяхъ, или на трехъ параллельныхъ прямыхъ, расположенныхъ или не расположенныхъ въ одной и той же плоскости.

VII. Черезъ точку O, взятую на продолженіи діаметра AB круга, центръ котораго C, проводятъ сѣкущую OMM'; требуется доказать, что произведеніе $tang\frac{1}{2}MCO.tang\frac{1}{2}M'CO$ постоянно, какова бы ни была сѣкущая, проведенная чрезъ O.

VIII. Четыре прямыя OP, OA, OQ, OB, выходящія изъ одной и той же точки, пересѣчены сѣкущею $PAQB$; доказать, что отношеніе $\frac{PA}{PB} : \frac{QA}{QB}$ есть постоянное число.

IX. Четыре плоскости OP, OA, OQ, OB, проведенныя чрезъ одну и ту же прямую O, встрѣчаются съ сѣкущею $PAQB$; доказать, что отношеніе $\frac{PA}{PB} : \frac{QA}{QB}$ есть постоянное число.

X. Найти площади правильныхъ многоугольниковъ о n сторонахъ, изъ которыхъ одинъ вписанъ въ кругъ а другой описанъ около круга, радіусъ котораго равенъ r, въ функціяхъ n и r. Вывести отсюда извѣстныя соотношенія между площадями правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ о n и $2n$ сторонахъ.

XI Если треугольникъ ABC (*см.* фиг. n° 68-го) прямоугольный при A и если опустить перпендикуляръ AD на сторону BC то, какъ извѣстно, имѣемъ $\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{BD}{CD}$. Спрашивается, можетъ ли существовать это соотношеніе, если уголъ A не прямой?

XII. Доказать, что если биссектриссы двухъ угловъ треугольника равны между собою, то и самые эти углы равны между собою.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРІЯ.

Предметъ сферической тригонометріи.

107. Сферическая тригонометрія занимается рѣшеніемъ сферическихъ треугольниковъ.

Стороны сферическихъ треугольниковъ, точно такъ же какъ и углы, выражаются вообще въ градусахъ, минутахъ и секундахъ; но, когда знаютъ число градусовъ, содержащихся въ одной изъ сторонъ, то легко находятъ (n° 48), въ случаѣ надобности, отношеніе этой стороны къ радіусу шара.

Мы будемъ разсматривать только такіе сферическіе треугольники, каждая изъ сторонъ которыхъ меньше 180 градусовъ, такъ что если ABC будетъ сферическій треугольникъ, построенный на поверхности шара, центръ котораго находится въ O, то, соединивъ эту точку O съ тремя вершинами, образуемъ трегранный уголъ, котораго плоскіе и двугранные углы будутъ соотвѣтственно равны сторонамъ и угламъ сферическаго треугольника.

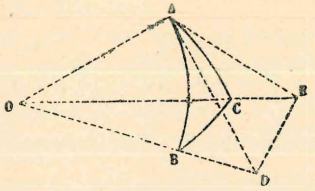
Мы постоянно будемъ означать чрезъ A, B, C углы треугольника и чрезъ a, b, c соотвѣтственно противолежащія имъ стороны.

Соотношенія между углами и сторонами сферическаго треугольника.

108. Соотношенія между тремя сторонами и угломъ.—Пусть данъ сферическій треугольникъ ABC (фиг. 28), построенный на поверхности какого нибудь шара, центръ котораго находится въ O и радіусъ котораго мы примемъ за единицу; предположимъ, что каждая изъ сто-

ронъ b и c меньше 90 градусовъ. Соединимъ центръ O съ тремя вершинами, и проведемъ къ дугамъ AB, AC касательныя AD,

Фиг. 28.



AE, встрѣчающія продолженія радіусовъ OB и OC соотвѣтственно въ точкахъ D и E. Имѣемъ

$$AD=tang\,c,\quad OD=sec\,c,\quad AE=tang\,b,\quad OE=sec\,b,$$

и

$$DAE=A,\quad DOE=a.$$

Изъ прямолинейныхъ треугольниковъ DAE и DOE находимъ

$$DE^2=AD^2+AF^2-2AD.AE\cos DAE,$$
$$DE^2=OD^2+OE^2-2OD.OE\cos DOE,$$

и, сравнивая между собою эти два значенія DE^2, получаемъ

$$2.OD.OE\cos DOE=(OD^2-AD^2)+(OE^2-AE^2)$$
$$+2AD.AE\cos DAE,$$

или

$$sec\,b\,sec\,c\cos a=1+tang\,b\,tang\,c\cos A,$$

или, наконецъ, умножая обѣ части на $cos\,b\,cos\,c$,

$$\cos a=\cos b\cos c+sin\,b\,sin\,c\cos A.$$

Таково соотношеніе, которое существуетъ между угломъ A и тремя сторонами.

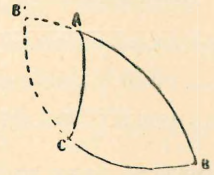
109. Мы полагали, что стороны b и c меньше 90 градусовъ, но формула, которую мы вывели, справедлива вообще.

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ сперва, что $c>90°$, но $b<90°$, и продолжимъ дуги AB и BC (фиг. 29) большого круга до встрѣчи

ихъ въ B'; если положимъ $AB'=c'$, $CB'=a'$, то изъ треугольника $AB'C$ получимъ

$$\cos a'=\cos b\cos c'+sin\,b\,sin\,c'\cos B'AC,$$

Фиг. 29.



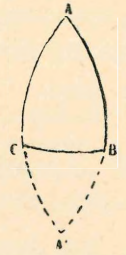
такъ какъ стороны c' и b меньше 90 градусовъ. Замѣняя a', c' и $B'AC$ имъ значеніями $180°-a$, $180°-c$ и $180°-A$, и перемѣнивъ знаки въ обѣихъ частяхъ равенства, найдемъ формулу

$$\cos a=\cos b\cos c+sin\,b\,sin\,c\cos A,$$

выведенную нами въ n° 108.

Предположимъ теперь, что $b>90°$, $c>90°$ и продолжимъ стороны AB и AC (фиг. 30) до встрѣчи ихъ въ A'; если положимъ

Фиг. 30.



$A'C=b'$, $A'B=c'$, то изъ треугольника $A'BC$ найдемъ

$$\cos a=\cos b'\cos c'+sin\,b'\,sin\,c'\cos A',$$

и, замѣняя b', c' и A' ихъ значеніями $180°-b$, $180°-c$, A, опять получимъ формулу

$$\cos a=\cos b\cos c+sin\,b\,sin\,c\cos A.$$

Наконецъ, такъ какъ эта формула справедлива, какъ бы ни были малы дополненія дугъ b и c до 90 градусовъ, то можно изъ нея

заключить, что она еще справедлива и въ предѣлѣ, когда одна изъ сторонъ b и c, или обѣ вмѣстѣ, дѣлаются равными 90 градусамъ.

Изъ только что выведенной нами формулы, при посредствѣ простой замѣны буквъ, выводимъ двѣ другія подобныя же формулы. Такимъ образомъ, имѣемъ три равенства:

$$(1)\qquad \begin{cases} \cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A, \\ \cos b = \cos a\cos c + \sin a\sin c\cos B, \\ \cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos C, \end{cases}$$

которыя слѣдуетъ разсматривать, какъ основныя формулы сферической тригонометріи. Въ самомъ дѣлѣ, между элементами сферическаго треугольника не можетъ существовать соотношенія, не вытекающаго изъ предыдущихъ; такъ какъ, въ противномъ случаѣ, исключая изъ него, при помощи формулъ (1), углы A, B, C, получимъ не тождественное соотношеніе между тремя сторонами, чего быть не можетъ. Но можно изъ соотношеній (1) вывести многія другія формулы, которыя необходимо знать и которыя мы теперь выведемъ.

110. Соотношенія между двумя сторонами и противолежащими углами.—Чтобы получить соотношеніе между сторонами a, b и углами A, B, достаточно исключить c изъ двухъ первыхъ равенствъ (1); это исключеніе можетъ быть произведено весьма просто, если въ равенствахъ (1) синусы угловъ A, B, C замѣнимъ ихъ косинусами.

Первое изъ равенствъ (1) даетъ

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c},$$

откуда

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \frac{\sin^2 b\sin^2 c - (\cos a - \cos b\cos c)^2}{\sin^2 b\sin^2 c}$$

$$= \frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c) - (\cos a - \cos b\cos c)^2}{\sin^2 b\sin^2 c}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 b\sin^2 c},$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c}$$

Это значеніе $\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a}$ не измѣняется, когда сдѣлаемъ перестановку буквъ a, b, c; отсюда слѣдуетъ, что уравненія (1) дадутъ одни и тѣ же значенія для $\frac{\sin^2 B}{\sin^2 b}$ и для $\frac{\sin^2 C}{\sin^2 c}$; слѣдовательно, исключеніе, которое имѣемъ въ виду, совершится само собою. Наконецъ, такъ какъ углы и стороны треугольника менѣе 180°, и, слѣдовательно, ихъ синусы положительны, то находимъ

$$(2)\qquad \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c},$$

послѣднія два равенства выражаютъ слѣдующее предложеніе: *во всякомъ сферическомъ треугольникѣ синусы угловъ пропорціональны синусамъ противолежащихъ сторонъ.*

111. Соотношенія между пятью элементами.—Если возьмемъ значеніе косинуса, даваемое однимъ изъ уравненій (1), и подставимъ въ два другія уравненія, то получимъ весьма полезныя соотношенія между пятью элементами. Напр., если подставимъ въ первую изъ формулъ (1) значеніе $\cos c$, даваемое третьей, то будемъ имѣть

$$\cos a = \cos a\cos^2 b + \sin a\sin b\cos b\cos C + \sin b\sin c\cos A;$$

перенося первый и второй члены изъ второй части равенства въ первую, замѣняя $1-\cos^2 b$ чрезъ $\sin^2 b$ и затѣмъ дѣля на $\sin b$, получимъ

$$\cos a\sin b - \sin a\cos b\cos C = \sin c\cos A,$$

а пять другихъ подобныхъ формулъ выведемъ посредствомъ перестановки буквъ, такъ что будемъ имѣть слѣдующую систему:

$$(3)\qquad \begin{cases} \cos a\sin b - \sin a\cos b\cos C = \sin c\cos A, \\ \cos b\sin a - \sin b\cos a\cos C = \sin c\cos B, \\ \cos b\sin c - \sin b\cos c\cos A = \sin a\cos B, \\ \cos c\sin b - \sin c\cos b\cos A = \sin a\cos C, \\ \cos c\sin a - \sin c\cos a\cos B = \sin b\cos C, \\ \cos a\sin c - \sin a\cos c\cos B = \sin b\cos A. \end{cases}$$

Эти шесть соотношеній однородны по отношенію къ $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$; слѣдовательно, можно замѣнить эти синусы пропорціональными

имъ синусами $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, и, такимъ образомъ, получимъ шесть новыхъ слѣдующихъ формулъ:

$$(4)\quad \begin{cases} \cos a \sin B - \cos b \cos C \sin A = \cos A \sin C, \\ \cos b \sin A - \cos a \cos C \sin B = \cos B \sin C, \\ \cos b \sin C - \cos c \cos A \sin B = \cos B \sin A, \\ \cos c \sin B - \cos b \cos A \sin C = \cos C \sin A, \\ \cos c \sin A - \cos a \cos B \sin C = \cos C \sin B, \\ \cos a \sin C - \cos c \cos B \sin A = \cos A \sin B. \end{cases}$$

112. Соотношенія между двумя сторонами, угломъ между этими сторонами и угломъ, противолежащимъ одной изъ нихъ. — Мы получимъ одно изъ соотношеній, о которыхъ идетъ рѣчь, если возьмемъ два изъ уравненій (1) и исключимъ изъ нихъ сторону, противолежащую одному изъ угловъ, которые въ него входятъ; но, такъ какъ эти два уравненія заключаютъ косинусъ и синусъ стороны, о которой идетъ рѣчь, то упрощаемъ вычисленія, пользуясь формулами (2), позволяющими исключить послѣдовательно косинусъ и синусъ.

Первая часть этого исключенія была произведена въ n° 111, поэтому, для полученія искомыхъ соотношеній, остается только исключить синусъ, который входитъ во вторую часть каждаго изъ уравненій (3), при посредствѣ той изъ формулъ (2), которая заключаетъ въ себѣ только тѣ же элементы. Напр., если раздѣлимъ первое уравненіе (3) на

$$\sin a = \frac{\sin c \sin A}{\sin C},$$

то получимъ

$$\cot a \sin b - \cos b \cos C = \cot A \sin C;$$

это и будетъ одно изъ искомыхъ уравненій; изъ него можно получить пять остальныхъ посредствомъ перестановки буквъ. Такимъ образомъ имѣемъ систему

$$(5)\quad \begin{cases} \cot a \sin b - \cot A \sin C = \cos b \cos C, \\ \cot b \sin a - \cot B \sin C = \cos a \cos C, \\ \cot b \sin c - \cot B \sin A = \cos c \cos A, \\ \cot c \sin b - \cot C \sin A = \cos b \cos A, \\ \cot c \sin a - \cot C \sin B = \cos a \cos B, \\ \cot a \sin c - \cot A \sin B = \cos c \cos B. \end{cases}$$

113. Соотношенія между стороною и тремя углами. — Мы получимъ соотношеніе между a, A, B, C, исключивъ b и c изъ основныхъ формулъ (1); но того же результата можно достигнуть гораздо легче, воспользовавшись формулами (4). Такимъ образомъ, исключивъ $\cos b$ изъ двухъ первыхъ уравненій (4), получимъ формулу

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a;$$

двѣ другія подобныя формулы получимъ посредствомъ простой перестановки буквъ, и тогда будемъ имѣть послѣднюю систему:

$$(6)\quad \begin{cases} \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \\ \cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b, \\ \cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c. \end{cases}$$

Замѣчаніе. — Каждое изъ уравненій (1), (2), (5), (6) заключаетъ въ себѣ только четыре элемента; всѣхъ ихъ пятнадцать, т. е. число ихъ равно числу сочетаній изъ шести буквъ по четыре.

О пополнительномъ треугольникѣ.

114. Извѣстно, что каждому сферическому треугольнику соотвѣтствуетъ второй треугольникъ, который называется *полярнымъ* или *пополнительнымъ* треугольникомъ. Вершины одного изъ двухъ треугольниковъ будутъ соотвѣтственно полюсами сторонъ другого, и углы каждаго изъ нихъ будутъ пополненіями сторонъ другого.

Разсмотрѣніе пополнительнаго треугольника часто бываетъ полезно въ сферической тригонометріи. Напр., получивъ основныя формулы (1) n° 109 и приложивъ ихъ къ треугольнику пополнительному относительно даннаго, мы получимъ немедленно формулы (6) n° 113. Въ самомъ дѣлѣ, достаточно для этого замѣнить a, b, c, A, B, C соотвѣтственно чрезъ 180°—A, 180°—B, 180°—C, 180°—a, 180°—b, 180°—c.

Точно такъ же мы получимъ формулы (4) n° 111-го, прилагая формулы (3) къ пополнительному треугольнику. Что же касается до другихъ полученныхъ нами системъ, то онѣ не приводятъ ни къ какой новой формулѣ.

Покажемъ еще здѣсь на одномъ примѣрѣ тѣ преимущества, которыя можно извлечь, введя въ разсмотрѣніе пополнительный треугольникъ. Обозначимъ чрезъ k постоянное отношеніе, которое существуетъ между синусомъ угла сферическаго треугольника и синусомъ противолежащей ему стороны. Мы нашли (110) соотношеніе

$$k^2 = \frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c},$$

которое можно написать такъ:

$$2\cos a\cos b\cos c=(k^2-1)\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c + \cos^2 a(1-\sin^2 b\sin^2 c)+\cos^2 b\cos^2 c;$$

всѣ члены во второй части этой формулы положительны, если

$$k>1,$$

откуда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Теорема I.—*Если въ сферическомъ треугольникѣ общее значеніе отношеній* $\frac{\sin A}{\sin a}, \frac{\sin B}{\sin b}, \frac{\sin C}{\sin c}$ *больше или равно единицѣ, то или три стороны меньше* 90 *градусовъ, или одна только сторона меньше* 90 *градусовъ.*

Прилагая эту теорему къ пополнительному треугольнику, получимъ слѣдующую:

Теорема II.—*Если въ сферическомъ треугольникѣ общее значеніе отношеній* $\frac{\sin A}{\sin a}, \frac{\sin B}{\sin b}, \frac{\sin C}{\sin c}$ *меньше или равно единицѣ, то или три угла больше* 90 *градусовъ, или одинъ только уголъ больше* 90 *градусовъ.*

Формулы, относящіяся къ прямоугольнымъ треугольникамъ.

115. Если сферическій треугольникъ имѣетъ только одинъ прямой уголъ, то противолежащая сторона называется *гипотенузою.*

Если положимъ $A=90$ градусамъ въ тѣхъ изъ формулъ n°° 109, 110, 112 и 113, которыя содержатъ уголъ A, то получимъ слѣдующія, относящіяся къ прямоугольнымъ треугольникамъ:

(1) $$\cos a=\cos b\cos c;$$

(2) $$\begin{cases} \sin b=\sin a\sin B, \\ \sin c=\sin a\sin C; \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} \operatorname{tang} b=\operatorname{tang} a\cos C, \\ \operatorname{tang} c=\operatorname{tang} a\cos B, \\ \operatorname{tang} b=\sin c\operatorname{tang} B, \\ \operatorname{tang} c=\sin b\operatorname{tang} C; \end{cases}$$

(4) $$\begin{cases} \cos a=\cot B\cot C, \\ \cos B=\cos b\sin C, \\ \cos C=\cos c\sin B. \end{cases}$$

Каждая изъ этихъ десяти формулъ содержитъ въ себѣ только три элемента; число ихъ въ точности равно числу сочетаній изъ пяти буквъ по три.

Уравненіе (1) выражаетъ, что

Въ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ косинусъ гипотенузы равенъ произведенію косинусовъ двухъ другихъ сторонъ.

Отсюда слѣдуетъ, что косинусы трехъ сторонъ будутъ или положительны или что два изъ нихъ отрицательны; слѣдовательно,

Во всякомъ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ или всѣ три стороны меньше 90 *градусовъ, или только одна изъ этихъ сторонъ меньше* 90 *градусовъ.*

Уравненіе (2) выражаетъ, что

Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ синусъ одного изъ катетовъ равенъ синусу гипотенузы, умноженному на синусъ противолежащаго угла.

Два первыя уравненія (3) выражаютъ, что

Во всякомъ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ тангенсъ одного изъ катетовъ равенъ тангенсу гипотенузы, умноженному на косинусъ прилежащаго угла.

Два послѣднія уравненія (3) выражаютъ, что

Во всякомъ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ тангенсъ

одного изъ катетовъ равенъ синусу другаго катета, умноженному на тангенсъ угла, противолежащаго первому катету.

Отсюда слѣдуетъ, что тангенсъ косого угла имѣетъ тотъ же знакъ, что и тангенсъ противолежащей стороны; и, слѣдовательно, эта сторона и этотъ уголъ будутъ или оба больше, или оба меньше 90 градусовъ.

Первое изъ уравненій (4) выражаетъ, что

Во всякомъ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ косинусъ гипотенузы равенъ произведенію котангенсовъ двухъ косыхъ угловъ.

Наконецъ, два послѣднія уравненія (4) выражаютъ, что

Во всякомъ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ косинусъ одного косого угла равенъ косинусу противолежащей стороны, умноженному на синусъ другого косого угла.

116. Предыдущія формулы могутъ быть преобразованы въ другія, весьма полезныя для вычисленій; покажемъ это.

Формула (1) даетъ $\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$; кромѣ того имѣемъ

$$tang\tfrac{1}{2}c = +\sqrt{\frac{1-\cos c}{1+\cos c}},$$

слѣдовательно,

$$tang\tfrac{1}{2}c = +\sqrt{\frac{\cos b-\cos a}{\cos b+\cos a}} = +\sqrt{tang\tfrac{1}{2}(a-b)\,tang\tfrac{1}{2}(a+b)},$$

почему, формулу (1) можно замѣнить одною изъ двухъ слѣдующихъ:

$$(5)\quad \begin{cases} tang\tfrac{1}{2}c = +\sqrt{tang\tfrac{1}{2}(a-b)\,tang\tfrac{1}{2}(a+b)}, \\ tang\tfrac{1}{2}b = +\sqrt{tang\tfrac{1}{2}(a-c)\,tang\tfrac{1}{2}(a+c)}. \end{cases}$$

Первая изъ формулъ (2) даетъ $\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}$, кромѣ того имѣемъ

$$tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}a) = \pm\sqrt{\frac{1+\sin a}{1-\sin a}},$$

слѣдовательно,

$$tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}a) = \pm\sqrt{\frac{\sin B+\sin b}{\sin B-\sin b}} = \pm\sqrt{\frac{tang\frac{1}{2}(B+b)}{tang\frac{1}{2}(B-b)}},$$

почему формулы (2) можно замѣнить двойною формулою

$$(6)\quad tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}a) = \pm\sqrt{\frac{tang\frac{1}{2}(B+b)}{tang\frac{1}{2}(B-b)}} = \pm\sqrt{\frac{tang\frac{1}{2}(C+c)}{tang\frac{1}{2}(C-c)}}.$$

И, такъ какъ изъ формулъ (2) первая не измѣнится, когда въ ней сдѣлаемъ перестановку буквъ a и B, а вторая, когда сдѣлаемъ перестановку въ ней буквъ a и C, то будемъ также имѣть

$$(7)\quad \begin{cases} tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}B) = \pm\sqrt{\frac{tang\frac{1}{2}(a+b)}{tang\frac{1}{2}(a-b)}}, \\ tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}C) = \pm\sqrt{\frac{tang\frac{1}{2}(a+c)}{tang\frac{1}{2}(a-c)}}. \end{cases}$$

Первая изъ формулъ (3) даетъ $\cos C = \frac{tang b}{tang a}$; кромѣ того имѣемъ

$$tang\tfrac{1}{2}C = +\sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}};$$

слѣдовательно,

$$tang\tfrac{1}{2}C = +\sqrt{\frac{tang\,a-tang\,b}{tang\,a+tang\,b}} = +\sqrt{\frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}};$$

такимъ образомъ, можемъ двѣ первыя формулы (3) замѣнить двумя слѣдующими:

$$(8)\quad \begin{cases} tang\tfrac{1}{2}C = +\sqrt{\frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}}, \\ tang\tfrac{1}{2}B = +\sqrt{\frac{\sin(a-c)}{\sin(a+c)}}. \end{cases}$$

Третья изъ формулъ (3) даетъ $\sin c = \frac{tang b}{tang B}$; кромѣ того имѣемъ

$$tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}c) = \pm\sqrt{\frac{1+\sin c}{1-\sin c}};$$

слѣдовательно,

$$tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}c) = \pm\sqrt{\frac{tang\,B+tang\,b}{tang\,B-tang\,b}} = \pm\sqrt{\frac{\sin(B+b)}{\sin(B-b)}},$$

одного изъ катетовъ равенъ синусу другаго катета, умноженному на тангенсъ угла, противолежащаго первому катету.

Отсюда слѣдуетъ, что тангенсъ косого угла имѣетъ тотъ же знакъ, что и тангенсъ противолежащей стороны; и, слѣдовательно, эта сторона и этотъ уголъ будутъ или оба больше, или оба меньше 90 градусовъ.

Первое изъ уравненій (4) выражаетъ, что

Во всякомъ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ косинусъ гипотенузы равенъ произведенію котангенсовъ двухъ косыхъ угловъ.

Наконецъ, два послѣднія уравненія (4) выражаютъ, что

Во всякомъ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ косинусъ одного косого угла равенъ косинусу противолежащей стороны, умноженному на синусъ другого косого угла.

116. Предыдущія формулы могутъ быть преобразованы въ другія, весьма полезныя для вычисленій; покажемъ это.

Формула (1) даетъ $\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$; кромѣ того имѣемъ

$$tang\tfrac{1}{2}c = +\sqrt{\frac{1-\cos c}{1+\cos c}},$$

слѣдовательно,

$$tang\tfrac{1}{2}c = +\sqrt{\frac{\cos b-\cos a}{\cos b+\cos a}} = +\sqrt{tang\tfrac{1}{2}(a-b)\,tang\tfrac{1}{2}(a+b)},$$

почему, формулу (1) можно замѣнить одною изъ двухъ слѣдующихъ:

$$(5)\qquad \begin{cases} tang\tfrac{1}{2}c = +\sqrt{tang\tfrac{1}{2}(a-b)\,tang\tfrac{1}{2}(a+b)}, \\ tang\tfrac{1}{2}b = +\sqrt{tang\tfrac{1}{2}(a-c)\,tang\tfrac{1}{2}(a+c)}. \end{cases}$$

Первая изъ формулъ (2) даетъ $\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}$, кромѣ того имѣемъ

$$tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}a) = \pm\sqrt{\frac{1+\sin a}{1-\sin a}},$$

слѣдовательно,

$$tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}a) = \pm\sqrt{\frac{\sin B+\sin b}{\sin B-\sin b}} = \pm\sqrt{\frac{tang\tfrac{1}{2}(B+b)}{tang\tfrac{1}{2}(B-b)}},$$

почему формулы (2) можно замѣнить двойною формулою

$$(6)\qquad tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}a) = \pm\sqrt{\frac{tang\tfrac{1}{2}(B+b)}{tang\tfrac{1}{2}(B-b)}} = \pm\sqrt{\frac{tang\tfrac{1}{2}(C+c)}{tang\tfrac{1}{2}(C-c)}}.$$

И, такъ какъ изъ формулъ (2) первая не измѣнится, когда въ ней сдѣлаемъ перестановку буквъ a и B, а вторая, когда сдѣлаемъ перестановку въ ней буквъ a и C, то будемъ также имѣть

$$(7)\qquad \begin{cases} tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}B) = \pm\sqrt{\dfrac{tang\tfrac{1}{2}(a+b)}{tang\tfrac{1}{2}(a-b)}}, \\ tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}C) = \pm\sqrt{\dfrac{tang\tfrac{1}{5}(a+c)}{tang\tfrac{1}{2}(a-c)}}. \end{cases}$$

Первая изъ формулъ (3) даетъ $\cos C = \frac{tang b}{tang a}$; кромѣ того имѣемъ

$$tang\tfrac{1}{2}C = +\sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}};$$

слѣдовательно,

$$tang\tfrac{1}{2}C = +\sqrt{\frac{tang a-tang b}{tang a+tang b}} = +\sqrt{\frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}};$$

такимъ образомъ, можемъ двѣ первыя формулы (3) замѣнить двумя слѣдующими:

$$(8)\qquad \begin{cases} tang\tfrac{1}{2}C = +\sqrt{\dfrac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}}, \\ tang\tfrac{1}{2}B = +\sqrt{\dfrac{\sin(a-c)}{\sin(a+c)}}. \end{cases}$$

Третья изъ формулъ (3) даетъ $\sin c = \frac{tang b}{tang B}$; кромѣ того имѣемъ

$$tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}c) = \pm\sqrt{\frac{1+\sin c}{1-\sin c}};$$

слѣдовательно,

$$tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}c) = \pm\sqrt{\frac{tang B+tang b}{tang B-tang b}} = \pm\sqrt{\frac{\sin(B+b)}{\sin(B-b)}},$$

почему, двѣ послѣднія формулы (3) можно замѣнить двумя слѣдующими:

$$(9)\quad \begin{cases} tang(45°+\frac{1}{2}c)=\pm\sqrt{\dfrac{sin(B+b)}{sin(B-b)}}, \\ tang(45°+\frac{1}{2}b)=\pm\sqrt{\dfrac{sin(C+c)}{sin(C-c)}}. \end{cases}$$

Первая формула (4) преобразовывается въ слѣдующую:

$$tang\tfrac{1}{2}a=+\sqrt{\frac{1-cos\,a}{1+cos\,a}}=+\sqrt{\frac{sin\,B\,sin\,C-cos\,B\,cos\,C}{sin\,B\,sin\,C+cos\,B\,cos\,C}},$$

или

$$(10)\qquad tang\tfrac{1}{2}a=+\sqrt{\frac{cos(180°-B-C)}{cos(B-C)}}.$$

Наконецъ, двѣ послѣднія формулы (4) даютъ

$$cos\,b=\frac{cos\,B}{cos(90°-C)},\quad cos\,c=\frac{cos\,C}{cos(90°-B)},$$

откуда

$$(11)\quad \begin{cases} tang\tfrac{1}{2}b=+\sqrt{tang\left(-45°+\dfrac{B+C}{2}\right)tang\left(45°+\dfrac{B-C}{2}\right)}, \\ tang\tfrac{1}{2}c=+\sqrt{tang\left(-45°+\dfrac{B+C}{2}\right)tang\left(45°-\dfrac{B-C}{2}\right)}. \end{cases}$$

И, такъ какъ двѣ послѣднія формулы (4) не измѣняются, если замѣнить въ нихъ каждый изъ элементовъ b и C или c и B дополненіемъ другого, то также будемъ имѣть

$$(12)\quad \begin{cases} tang(45°+\frac{1}{2}C)=\pm\sqrt{cot\tfrac{1}{2}(B+b)cot\tfrac{1}{2}(B-b)}, \\ tang(45°+\frac{1}{2}B)=\pm\sqrt{cot\tfrac{1}{2}(C+c)cot\tfrac{1}{2}(C-c)}. \end{cases}$$

Формулы, относящіяся къ прямостороннимъ треугольникамъ.

117. Сферическій треугольникъ называется *прямостороннимъ*, когда одна изъ его сторонъ равна 90 градусамъ. Треугольникъ пополнительный такого треугольника, очевидно, будетъ прямоугольный, и, слѣдовательно, формулы, относящіяся къ прямостороннимъ треугольникамъ, могутъ быть выведены изъ формулъ, относящихся къ прямоугольнымъ треугольникамъ; но эти формулы получаются также легко, если положимъ $a=90$ градусамъ въ тѣхъ изъ общихъ формулъ, которыя содержатъ сторону a. Поступая тѣмъ или инымъ способомъ, находимъ десять формулъ:

$$(1)\qquad cos\,A=-cos\,B\,cos\,C;$$

$$(2)\quad \begin{cases} sin\,B=sin\,A\,sin\,b, \\ sin\,C=sin\,A\,sin\,c; \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} tang\,B=-tang\,A\,cos\,c, \\ tang\,C=-tang\,A\,cos\,b, \\ tang\,B=sin\,C\,tang\,b, \\ tang\,C=sin\,B\,tang\,c; \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} cos\,A=-cot\,b\,cot\,c, \\ cos\,b=cos\,B\,sin\,c, \\ cos\,c=cos\,C\,sin\,b. \end{cases}$$

Эти формулы можно подвергнуть преобразованіямъ аналогичнымъ съ тѣми, которыя мы выполнили въ n° 116 для прямоугольныхъ треугольниковъ; мы вернемся къ этимъ преобразованіямъ при рѣшеніи прямостороннихъ треугольниковъ.

Употребленіе вспомогательныхъ угловъ въ сферической тригонометріи.

118. Общія формулы n°° 110, 112 и 113 не удобны для логариѳмированія; но ихъ можно сдѣлать удобными, воспользовавшись для этого вспомогательнымъ угломъ. Дѣйствительно, каждая изъ этихъ формулъ будетъ вида

$$(1)\qquad P=M\,cos\,\alpha+N\,sin\,\alpha,$$

гдѣ α обозначаетъ одинъ изъ шести элементовъ, а M, N, P обозначаютъ *одночленныя* функціи тригонометрическихъ линій трехъ элементовъ, отличныхъ отъ α. Если обозначить чрезъ φ такой вспомогательный уголъ, чтобы

$$tang\varphi = \frac{N}{M}, \tag{2}$$

и если въ формулѣ (1) замѣнить N чрезъ $M\,tang\varphi$, то она приметъ видъ

$$P\cos\varphi = M\cos(\alpha - \varphi). \tag{3}$$

Отсюда слѣдуетъ, что, если введемъ новый элементъ φ, то формула (1) можетъ быть замѣнена системою формулъ (2) и 3), каждая изъ которыхъ удобна для логариѳмированія.

Впослѣдствіи мы увидимъ, что введеніе этого вспомогательнаго угла φ равносильно разложенію даннаго треугольника на два прямоугольныхъ или на два прямосторонніхъ треугольника при помощи дуги большого круга, проведенной изъ вершины къ противолежащей сторонѣ.

Общія формулы удобныя для логариѳмированія.

119. Преобразовывая и комбинируя между собою общія формулы n° 109 и слѣдующихъ, мы получимъ новыя, удобныя для логариѳмированія формулы, весьма часто употребляющіяся при рѣшеніи задачъ сферической тригонометріи. Мы займемся здѣсь этимъ преобразованіемъ.

Основная формула

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A$$

даетъ

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c};$$

подставивъ это значеніе $\cos A$ въ формулы

$$\sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}},\quad \cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}},$$

получимъ

$$\sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin b\sin c + \cos b\cos c - \cos a}{2\sin b\sin c}} = \sqrt{\frac{\cos(b-c) - \cos a}{2\sin b\sin c}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin\frac{a-b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin b\sin c}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\cos a\cos b\cos c + \sin b\sin c}{2\sin b\sin c}} = \sqrt{\frac{\cos a - \cos(b+c)}{2\sin b\sin c}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{-a+b+c}{2}}{\sin b\sin c}}.$$

При посредствѣ простой замѣны буквъ получимъ аналогичныя выраженія для синусовъ и косинусовъ угловъ $\frac{1}{2}B$ и $\frac{1}{2}C$. Такъ что, если обозначить для краткости периметръ $a+b+c$ чрезъ $2p$, то будемъ имѣть

$$(1)\quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}, \\ \sin\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin a\sin c}}, \\ \sin\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}}; \end{cases}$$

и

$$(2)\quad \begin{cases} \cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}, \\ \cos\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin a\sin c}}, \\ \cos\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}. \end{cases}$$

Наконецъ, дѣля формулы (1) соотвѣтственно на формулы (2), получимъ

$$(3)\quad \begin{cases} tang\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}}, \\ tang\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-b)}}, \\ tang\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p\sin(p-c)}}. \end{cases}$$

Во всѣхъ этихъ формулахъ корень долженъ быть взятъ со знакомъ $+$, такъ какъ тригонометрическія линіи острыхъ угловъ $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}C$ положительны.

120. Обозначимъ чрезъ ε *сферическій избытокъ* треугольника ABC, т. е. уголъ $A+B+C-180°$; углы треугольника пополнительнаго относительно ABC будутъ $180°-a$, $180°-b$, $180°-c$, тогда какъ стороны того же треугольника будутъ $180°-A$, $180°-B$, $180°-C$; полусумма этихъ трехъ сторонъ будетъ $180°-\frac{1}{2}\varepsilon$. Отсюда слѣдуетъ, что если хотятъ примѣнить формулы (1), (2), (3) къ треугольнику пополнительному относительно ABC, то достаточно замѣнить A, B, C, a, b, c и p пополненіями a, b, c, A, B, C и $\frac{1}{2}\varepsilon$. Такимъ образомъ получимъ девять слѣдующихъ формулъ:

$$(4)\quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}a=\sqrt{\dfrac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\,\sin(A-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\sin B\sin C}}, \\ \sin\frac{1}{2}b=\sqrt{\dfrac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\,\sin(B-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\sin A\sin C}}. \\ \sin\frac{1}{2}c=\sqrt{\dfrac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\,\sin(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\sin A\sin B}}; \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \cos\frac{1}{2}a=\sqrt{\dfrac{\sin(B-\frac{1}{2}\varepsilon)\,\sin(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\sin B\sin C}}, \\ \cos\frac{1}{2}b=\sqrt{\dfrac{\sin(A-\frac{1}{2}\varepsilon)\,\sin(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\sin A\sin C}}. \\ \cos\frac{1}{2}c=\sqrt{\dfrac{\sin(A-\frac{1}{2}\varepsilon)\,\sin(B-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\sin A\sin B}}, \end{cases}$$

и

$$(6)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\frac{1}{2}a=\sqrt{\dfrac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\,\sin(A-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\sin(B-\frac{1}{2}\varepsilon)\,\sin(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}}, \\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}b=\sqrt{\dfrac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\,\sin(B-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\sin(A-\frac{1}{2}\varepsilon)\,\sin(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}}, \\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}c=\sqrt{\dfrac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\,\sin(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\sin(A-\frac{1}{2}\varepsilon)\,\sin(B-\frac{1}{2}\varepsilon)}}. \end{cases}$$

121. Формулы Деламбра.—Изъ формулъ (1) и (2) выводимъ

$$\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B=\frac{\sin(p-b)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p\,\sin(p-c)}{\sin a\,\sin b}}=\frac{\sin(p-b)}{\sin c}\cos\frac{1}{2}C,$$

$$\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B=\frac{\sin(p-a)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p\,\sin(p-c)}{\sin a\,\sin b}}=\frac{\sin(p-a)}{\sin c}\cos\frac{1}{2}C,$$

$$\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B=\frac{\sin p}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\,\sin(p-b)}{\sin a\,\sin b}}=\frac{\sin p}{\sin c}\sin\frac{1}{2}C,$$

$$\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B=\frac{\sin(p-c)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\,\sin(p-b)}{\sin a\,\sin b}}=\frac{\sin(p-c)}{\sin c}\sin\frac{1}{2}C,$$

отсюда получаемъ

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\pm\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\sin(p-b)\pm\sin(p-a)}{\sin c},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\mp\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\sin p\mp\sin(p-c)}{\sin c};$$

но, кромѣ того, имѣемъ

$$\sin(p-b)+\sin(p-a)=2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a-b),$$

$$\sin(p-b)-\sin(p-a)=2\cos\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(a-b).$$

$$\sin p+\sin(p-c)=2\cos\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(a+b),$$

$$\sin p-\sin(p-c)=2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a+b),$$

$$\sin c=2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c,$$

слѣдовательно,

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}, \\ \dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}, \\ \dfrac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}, \\ \dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}. \end{cases}$$

Эти формулы заключаютъ въ себѣ шесть элементовъ треугольника; онѣ были найдены Деламбромъ, который еще въ 1807 г. помѣстилъ ихъ въ *Connaissance des Temps* на 1809 г. (стр. 443). Гаусъ, которому ихъ иногда приписываютъ, предложилъ ихъ только двумя годами позже, въ сочиненіи озаглавленномъ: *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium.*

122. Формулы Нэпера.—Если первое изъ уравненій (7) раздѣлить на третье, второе на четвертое, потомъ четвертое на третье и второе на первое, то найдемъ слѣдующія четыре:

$$(8)\quad \begin{cases} tang\frac{1}{2}(A+B)=cot\frac{1}{2}C\,\frac{cos\frac{1}{2}(a-b)}{cos\frac{1}{2}(a+b)}, \\ tang\frac{1}{2}(A-B)=cot\frac{1}{2}C\,\frac{sin\frac{1}{2}(a-b)}{sin\frac{1}{2}(a+b)}, \\ tang\frac{1}{2}(a+b)=tang\frac{1}{2}c\,\frac{cos\frac{1}{2}(A-B)}{cos\frac{1}{2}(A+B)}, \\ tang\frac{1}{2}(a-b)=tang\frac{1}{2}c\,\frac{sin\frac{1}{2}(A-B)}{sin\frac{1}{2}(A+B)}. \end{cases}$$

Уравненія эти (8) извѣстны подъ именемъ *формулъ Нэпера*; каждое изъ нихъ выражаетъ соотношеніе между пятью элементами сферическаго треугольника.

123. Изъ формулъ (7) выводимъ

$$\frac{cos\frac{1}{2}c-cos\frac{1}{2}C}{cos\frac{1}{2}c+cos\frac{1}{2}C}=\frac{cos\frac{1}{2}(a-b)-sin\frac{1}{2}(A+B)}{cos\frac{1}{2}(a-b)+sin\frac{1}{2}(A+B)},$$
$$\frac{sin\frac{1}{2}C-sin\frac{1}{2}c}{sin\frac{1}{2}C+sin\frac{1}{2}c}=\frac{cos\frac{1}{2}(A-B)-sin\frac{1}{2}(a+b)}{cos\frac{1}{2}(A-B)+sin\frac{1}{2}(a+b)},$$
$$\frac{cos\frac{1}{2}C-sin\frac{1}{2}c}{cos\frac{1}{2}C+sin\frac{1}{2}c}=\frac{sin\frac{1}{2}(A-B)-sin\frac{1}{2}(a-b)}{sin\frac{1}{2}(A-B)+sin\frac{1}{2}(a-b)},$$
$$\frac{-sin\frac{1}{2}C+cos\frac{1}{2}c}{sin\frac{1}{2}C+cos\frac{1}{2}c}=\frac{-cos\frac{1}{2}(A+B)+cos\frac{1}{2}(a+b)}{cos\frac{1}{2}(A+B)+cos\frac{1}{2}(a+b)}.$$

Если, для краткости, положимъ

$$A+B=S+180°,\quad A-B=D,$$
$$a+b=s+180°,\quad a-b=d,$$

то, преобразовавъ предыдущія формулы при помощи способа n° 18, найдемъ

$$(9)\quad \begin{cases} tang\frac{C-c}{4}\,tang\frac{C+c}{4}=tang\frac{S+d}{4}\,tang\frac{S-d}{4}, \\ tang\frac{C-c}{4}\,cot\frac{C+c}{4}=tang\frac{s+D}{4}\,tang\frac{s-D}{4}, \end{cases}$$

и

$$(10)\quad \begin{cases} tang\left(45°+\frac{C-c}{4}\right)cot\left(45°+\frac{C+c}{4}\right)=tang\frac{D-d}{4}\,cot\frac{D+d}{4}, \\ tang\left(45°+\frac{C-c}{4}\right)tang\left(45°+\frac{C+c}{4}\right)=-cot\frac{S-s}{4}\,tang\frac{S+s}{4}; \end{cases}$$

изъ послѣднихъ формулъ (9) и (10) получимъ

$$(11)\quad \begin{cases} tang\frac{C-c}{4}=\pm\sqrt{tang\frac{S+d}{4}\,tang\frac{S-d}{4}\,tang\frac{s+D}{4}\,tang\frac{s-D}{4}}, \\ tang\frac{C+c}{4}=+\sqrt{tang\frac{S+d}{4}\,tang\frac{S-d}{4}\,cot\frac{s+D}{4}\,cot\frac{s-D}{4}}, \end{cases}$$

и

$$(12)\quad \begin{cases} tang\left(45°+\frac{C-c}{4}\right)=+\sqrt{-tang\frac{D-d}{4}\,cot\frac{D+d}{4}\,cot\frac{S-s}{4}\,tang\frac{S+s}{4}}, \\ tang\left(45°+\frac{C+c}{4}\right)=\pm\sqrt{-cot\frac{D-d}{4}\,tang\frac{D+d}{4}\,cot\frac{S-s}{4}\,tang\frac{S+s}{4}}. \end{cases}$$

Во второй формулѣ (11) и въ первой (12) корень долженъ быть взятъ со знакомъ +, такъ какъ дуги $\frac{C+c}{4}$ и $45°+\frac{C-c}{4}$ заключаются между 0 и 90 градусами, почему ихъ тангенсы положительны. Въ двухъ другихъ формулахъ знакъ корня опредѣляется легко; въ самомъ дѣлѣ, $tang\frac{C-c}{4}$ имѣетъ тотъ же знакъ, что и вторыя части формулъ (9); точно такъ же $tang\left(45°+\frac{C+c}{4}\right)$ имѣетъ тотъ же знакъ, что и вторыя части формулъ (10).

Различныя выраженія для сферическаго избытка. Новыя формулы.

124. Сферическій избытокъ, которымъ какъ извѣстно, измѣряется площадь сферическаго треугольника, есть элементъ весьма важный

въ приложеніяхъ тригонометріи къ геодезіи. Мы выведемъ здѣсь различныя новыя формулы, заключающія этотъ элементъ, которыя могутъ послужить къ вычисленію его въ тѣхъ разныхъ случаяхъ, которые могутъ представиться.

Если перемножимъ между собою два первыя уравненія системы (4) n°120, а также и первыя два изъ системы (5), то, раздѣливъ полученныя уравненія на третье уравненіе (5), получимъ

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\sin C}, \\ \dfrac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}=\dfrac{\sin(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\sin C}; \end{cases}$$

складывая эти два уравненія, предварительно умноживъ ихъ соотвѣтственно сперва на $\cos C$ и 1, потомъ на 1 и $\cos C$, найдемъ

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C}{\cos\frac{1}{2}c}=\cos\frac{1}{2}\varepsilon, \\ \dfrac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b+\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos C}{\cos\frac{1}{2}c}=\cos(C-\frac{1}{2}\varepsilon); \end{cases}$$

раздѣливъ первую и вторую формулу (1) соотвѣтственно на первую и вторую формулу (2), будемъ имѣть

$$(3)\qquad \begin{cases} \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon=\dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a\operatorname{tang}\frac{1}{2}b\sin C}{1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}a\operatorname{tang}\frac{1}{2}b\cos C}, \\ \operatorname{tang}(C-\frac{1}{2}\varepsilon)=\dfrac{\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b\sin C}{1+\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b\cos C}. \end{cases}$$

Первая изъ формулъ (3) даетъ сферическій избытокъ въ функціи двухъ сторонъ и угла между ними; первыя формулы каждой изъ системъ (1) и (2) также доставляютъ выраженіе для сферическаго избытка; но это выраженіе зависитъ отъ четырехъ элементовъ. Слѣдуетъ замѣтить, что обѣ формулы (3) ничто иное, какъ формулы, преобразованныя изъ первой формулы Нэпера, а именно:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B)=\cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)};$$

въ самомъ дѣлѣ, если замѣнимъ $\frac{1}{2}(A+B)$ чрезъ $90°-\frac{1}{2}(C-\varepsilon)$, то найдемъ формулу

$$(4)\qquad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(C-\varepsilon)=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)},$$

изъ которой легко выводимъ обѣ формулы (3).

При посредствѣ уравненій

$$\sin C=2\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C=\frac{2\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{\sin a\sin b},$$

$$\cos C=\frac{\cos c-\cos a\cos b}{\sin a\sin b}$$

можно исключить изъ формулъ (1) и (2) уголъ C; такимъ образомъ получимъ

$$(5)\qquad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}\varepsilon=\dfrac{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}, \\ \sin(C-\frac{1}{2}\varepsilon)=\dfrac{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}, \end{cases}$$

и

$$(6)\qquad \begin{cases} \cos\frac{1}{2}\varepsilon=\dfrac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}, \\ \cos(C-\frac{1}{2}\varepsilon)=\dfrac{\sin^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}. \end{cases}$$

Формулы (5) и (6) даютъ выраженіе для $\frac{1}{2}\varepsilon$ и $C-\frac{1}{2}\varepsilon$ въ функціи трехъ сторонъ, но можно получить другія выраженія, которыя значительно проще.

Посредствомъ формулъ (6) и соотношеній

$$\sin\tfrac{1}{2}x=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}},\quad \cos\tfrac{1}{2}x=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

можемъ вычислить синусы и косинусы угловъ $\frac{1}{4}\varepsilon$ и $\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon$; такимъ образомъ, для угла $\frac{1}{4}\varepsilon$ получимъ

$$\sin\tfrac{1}{4}\varepsilon=\sqrt{\frac{\sin^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}b-(\cos\frac{1}{2}c-\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b)^2}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}},$$

$$\cos\tfrac{1}{4}\varepsilon=\sqrt{\frac{(\cos\frac{1}{2}c+\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b)^2-\sin^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}b}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}}.$$

Числители дробей, находящихся подъ радикалами, легко разлагаются на множителей, и мы имѣемъ слѣдующія значенія:

$$(7)\quad \begin{cases} \sin\frac{1}{4}\varepsilon = \sqrt{\dfrac{\sin\frac{p}{2}\sin\frac{p-a}{2}\sin\frac{p-b}{2}\sin\frac{p-c}{2}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}}, \\ \cos\frac{1}{4}\varepsilon = \sqrt{\dfrac{\cos\frac{p}{2}\cos\frac{p-a}{2}\cos\frac{p-b}{2}\cos\frac{p-c}{2}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}}. \end{cases}$$

Перемножая уравненія (7), найдемъ первую формулу (5); дѣля же первое уравненіе (7) на второе, получимъ замѣчательную формулу:

$$(8)\quad \operatorname{tang}\frac{1}{4}\varepsilon = \sqrt{\operatorname{tang}\frac{p}{2}\operatorname{tang}\frac{p-a}{2}\operatorname{tang}\frac{p-b}{2}\operatorname{tang}\frac{p-c}{2}},$$

которая принадлежитъ Симону Люилье (Simon l'Huillier) изъ Женевы.

Вторая формула (6) выводится изъ первой, если замѣнимъ въ ней a и b ихъ пополненіями $180°-a$, $180°-b$, и ε чрезъ $2C-\varepsilon$; эти же самыя замѣны можно сдѣлать въ уравненіяхъ (7) и (8), которыя тогда опредѣлятъ синусъ, косинусъ и тангенсъ угла $\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon$. Но, если замѣнимъ a и b чрезъ $180°-a$ и $180°-b$, то количества $\frac{p-a}{2}$ и $\frac{p-b}{2}$ обратятся одно въ другое, тогда какъ каждое изъ количествъ $\frac{p}{2}$ и $\frac{p-c}{2}$ обратятся въ дополненіе другого; слѣдовательно, мы можемъ написать немедленно тригонометрическія линіи угла $\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon$ и при посредствѣ простой перестановки буквъ, будемъ имѣть также тригонометрическія линіи угловъ $\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon$ и $\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon$. Сдѣлавъ, напримѣръ, въ формулѣ (8) замѣны, которыя мы только что указали, найдемъ

$$(9)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon) = \sqrt{\dfrac{\operatorname{tang}\frac{p-b}{2}\operatorname{tang}\frac{p-c}{2}}{\operatorname{tang}\frac{p}{2}\operatorname{tang}\frac{p-a}{2}}}, \\ \operatorname{tang}(\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon) = \sqrt{\dfrac{\operatorname{tang}\frac{p-c}{2}\operatorname{tang}\frac{p-a}{2}}{\operatorname{tang}\frac{p}{2}\operatorname{tang}\frac{p-b}{2}}}, \\ \operatorname{tang}(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon) = \sqrt{\dfrac{\operatorname{tang}\frac{p-a}{b}\operatorname{tang}\frac{p-b}{2}}{\operatorname{tang}\frac{p}{2}\operatorname{tang}\frac{p-c}{2}}}. \end{cases}$$

Четыре уравненія (8) и (9) можно рѣшить относительно количествъ $\operatorname{tang}\frac{p}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{p-a}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{p-b}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{p-c}{2}$, и тогда получимъ

$$(10)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\frac{p}{2} = \sqrt{\dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{4}\varepsilon}{\operatorname{tang}(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon)\operatorname{tang}(\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon)\operatorname{tang}(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon)}}, \\ \operatorname{tang}\frac{p-a}{2} = \sqrt{\dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{4}\varepsilon\operatorname{tang}(\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon)\operatorname{tang}(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon)}{\operatorname{tang}(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon)}}, \\ \operatorname{tang}\frac{p-b}{2} = \sqrt{\dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{4}\varepsilon\operatorname{tang}(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon)\operatorname{tang}(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon)}{\operatorname{tang}(\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon)}}, \\ \operatorname{tang}\frac{p-c}{2} = \sqrt{\dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{4}\varepsilon\operatorname{tang}(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon)\operatorname{tang}(\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon)}{\operatorname{tang}(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon)}}. \end{cases}$$

Выраженія для радіуса круга описаннаго и радіусовъ круговъ вписаннаго и извнѣвписанныхъ.

125. Если соединимъ три вершины сферическаго треугольника съ полюсомъ круга описаннаго, то получимъ три равнобедренные треугольника, которые будутъ имѣть основаніями соотвѣтственно стороны a, b, c. Обозначимъ чрезъ x каждый изъ равныхъ угловъ въ томъ изъ этихъ треугольниковъ, который имѣетъ основаніе a, чрезъ y и z каждый изъ равныхъ угловъ въ равнобедренныхъ тре-

угольникахъ, которые имѣютъ соотвѣтственно основанія b и c. Если полюсъ находится внутри треугольника, то будемъ имѣть

$$y+z=A,\ z+x=B,\ x+y=C,$$

откуда

$$x+y+z=\tfrac{1}{2}(A+B+C)=90^\circ+\tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

и, слѣдовательно,

$$x=90^\circ-(A-\tfrac{1}{2}\varepsilon),$$
$$y=90^\circ-(B-\tfrac{1}{2}\varepsilon),$$
$$z=90^\circ-(C-\tfrac{1}{2}\varepsilon).$$

Легко убѣдиться, что эти формулы будутъ справедливы и для того случая, когда полюсъ не лежитъ внутри треугольника, если только условимся считать отрицательнымъ то изъ количествъ x, y, z, которое относится къ равнобедренному треугольнику, расположенному всецѣло внѣ даннаго треугольника.

Послѣ этого, обозначимъ чрезъ R сферическій радіусъ круга, описаннаго около треугольника, соединимъ полюсъ этого круга съ вершиною A и проведемъ изъ того же полюса дугу большого круга перпендикулярно къ сторонѣ c; такимъ образомъ образуется прямоугольный треугольникъ, въ которомъ будемъ имѣть

$$tang\,R\cos z=tang\tfrac{1}{2}c,$$

откуда, замѣнивъ z его значеніемъ $90^\circ-(C-\frac{1}{2}\varepsilon)$, найдемъ формулу

$$(1)\qquad tang\,R=\frac{tang\frac{1}{2}c}{\sin(C-\frac{1}{2}\varepsilon)},$$

которая даетъ R въ функціи стороны, противолежащаго угла и сферическаго избытка.

Если въ ней замѣнимъ $\sin(C-\frac{1}{2}\varepsilon)$ его значеніемъ, полученнымъ изъ второй формулы системы (5) n° 124, то получимъ

$$(2)\qquad tang\,R=\frac{2\sin\frac{1}{2}a\,\sin\frac{1}{2}b\,\sin\frac{1}{2}c}{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}.$$

Наконецъ, если въ формулѣ (1) вмѣсто $tang\frac{1}{2}c$ подставимъ его значеніе, выведенное изъ уравненій (6) n° 120, то найдемъ формулу

$$(3)\qquad tang\,R=\frac{\sqrt{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}}{\sqrt{\sin(A-\frac{1}{2}\varepsilon)\sin(B-\frac{1}{2}\varepsilon)\sin(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}},$$

которая даетъ выраженіе для R въ функціи угловъ.

Формула (1) заключаетъ въ себѣ доказательство слѣдующей теоремы, которой мы обязаны Лекселю (Lexell):

Геометрическое мѣсто вершинъ всѣхъ сферическихъ треугольниковъ, имѣющихъ то же основаніе и ту же площадь, есть окружность круга, которая проходитъ чрезъ двѣ точки, діаметрально противоположныя концамъ основанія.

Пусть $A'B'$ будетъ данное основаніе и $A'B'C$—одинъ изъ треугольниковъ, которыхъ сферическій избытокъ имѣетъ данное значеніе ε'; пусть A и B будутъ точки, діаметрально противоположныя точкамъ A' и B', и ε—сферическій избытокъ треугольника ABC. На основаніи извѣстной изъ геометріи теоремы, сумма площадей двухъ треугольниковъ ABC и $A'B'C$ равна площади двусторонника, котораго уголъ C; слѣдовательно, будемъ имѣть

$$\varepsilon+\varepsilon'=2C,\ \text{откуда}\ \tfrac{1}{2}\varepsilon'=C-\tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Теперь, если R обозначаетъ радіусъ круга, описаннаго около треугольника ABC, то по формулѣ (1) имѣемъ

$$tang\,R=\frac{tang\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon'},$$

и такъ какъ c и ε' постоянны, то и R будетъ постоянно, что и служитъ доказательствомъ теоремы.

126. Обозначимъ чрезъ r радіусъ круга, вписаннаго въ сферическій треугольникъ. Если соединимъ полюсъ этого круга съ вершиною A и изъ него же опустимъ перпендикуляръ на сторону b, то составимъ прямоугольный сферическій треугольникъ, въ которомъ одинъ изъ катетовъ будетъ r; другой катетъ будетъ $\frac{b+c-a}{2}$ или $p-a$, а прилежащій къ нему уголъ $\frac{1}{2}A$; поэтому будемъ имѣть

$$tang\,r=\sin(p-a)tang\tfrac{1}{2}A,$$

или, замѣняя $tang\frac{1}{2}A$ его значеніемъ въ функціи сторонъ, получимъ

$$(4) \qquad tang\, r = \sqrt{\frac{sin(p-a)\, sin(p-b)\, sin(p-c)}{sin\, p}}.$$

Если обозначимъ чрезъ α, β, γ радіусы извнѣвписанныхъ круговъ, которые касаются соотвѣтственно сторонъ a, b, c и продолженій двухъ другихъ, то подобнымъ же образомъ найдемъ

$$(5) \quad \begin{cases} tang\, \alpha = \sqrt{\dfrac{sin\, p\, sin(p-b) sin(p-c)}{sin(p-a)}}, \\ tang\, \beta = \sqrt{\dfrac{sin\, p\, sin(p-a) sin(p-c)}{sin(p-b)}}, \\ tang\, \gamma = \sqrt{\dfrac{sin\, p\, sin(p-a) sin(p-b)}{sin(p-c)}}. \end{cases}$$

Рѣшеніе прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ.

127. Сферическій треугольникъ можетъ имѣть два или даже три прямые угла. Въ первомъ случаѣ, двѣ стороны равны 90 градусамъ, а третья сторона равна противолежащему углу. Во второмъ случаѣ, всѣ три стороны будутъ равны 90 градусамъ. Слѣдовательно, треугольники этого рода не могутъ доставить никакой задачи.

При рѣшеніи треугольниковъ, у которыхъ только одинъ прямой уголъ, мы имѣемъ шесть различныхъ случаевъ, которые далѣе и разсмотримъ; теперь же припомнимъ сдѣланное нами въ предыдущей главѣ замѣчаніе при разсмотрѣніи прямолинейныхъ треугольниковъ.

Когда сторона или уголъ сферическаго треугольника даны посредствомъ своего косинуса, тангенса или котангенса, то ихъ значеніе вполнѣ опредѣлено такъ какъ эта сторона или этотъ уголъ заключаются между 0 и 180 градусами; но когда они даны посредствомъ своего синуса, то они не вполнѣ опредѣлены, такъ какъ данному синусу соотвѣтствуютъ двѣ дуги или два пополнительныхъ угла.

Припомнимъ еще, что если уголъ или сторона, которые мы должны вычислить, даны посредствомъ своего косинуса или тангенса, и если значеніе этого косинуса или этого тангенса отрицательно, то слѣдуетъ, вмѣсто него, вычислять пополнительный ему уголъ, имѣющій, не принимая во вниманіе знака, тотъ же косинусъ и тотъ же тангенсъ.

128. Первый случай. — *По данной гипотенузѣ a и катету b вычислить другой катетъ c и два косыхъ угла B и C.*

Неизвѣстные элементы можно вычислить по слѣдующимъ формуламъ n° 115:

$$cos\, c = \frac{cos\, a}{cos\, b}, \quad sin\, B = \frac{sin\, b}{sin\, a}, \quad cos\, C = \frac{tang\, b}{tang\, a}.$$

Но лучше воспользоваться формулами n° 116-го, а именно

$$tang\tfrac{1}{2}c = +\sqrt{tang\tfrac{1}{2}(a-b)\, tang\tfrac{1}{2}(a+b)},$$

$$tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}B) = \pm\sqrt{\frac{tang\tfrac{1}{2}(a+b)}{tang\tfrac{1}{2}(a-b)}},$$

$$tang\tfrac{1}{2}C = +\sqrt{\frac{sin(a-b)}{sin(a+b)}}.$$

Эти послѣднія формулы, какъ и предыдущія, требуютъ отысканія только четырехъ логариѳмовъ для опредѣленія трехъ неизвѣстныхъ элементовъ; но онѣ имѣютъ предъ тѣми то преимущество, что даютъ неизвѣстныя посредствомъ тангенсовъ.

Замѣчаніе.—Для того, чтобы задача была возможна, необходимо и достаточно, чтобы $sin\, b < sin\, a$; такъ какъ, если это условіе выполнено, то значеніе $sin\, B$ будетъ меньше 1, а значенія $cos\, c$ и $cos\, C$ будутъ заключаться между -1 и $+1$. Если $a < 90^\circ$, то неравенство, о которомъ идетъ рѣчь, требуетъ, чтобы b было или $< a$ или $> 180^\circ - a$; если же $a > 90^\circ$, то b должно быть или $> a$ или $< 180^\circ - a$; наконецъ, если $a = 90^\circ$, то, очевидно, $sin\, b < sin\, a$. Если условіе возможности существуетъ, то задача допускаетъ одно только рѣшеніе, хотя уголъ B и данъ посредствомъ своего синуса, такъ какъ этотъ уголъ долженъ быть меньше или больше 90 градусовъ, смотря потому, будетъ ли данная сторона b сама меньше или больше 90 градусовъ. То же соображеніе позволяетъ опредѣлить знакъ, съ которымъ надо брать корень, выражающій значеніе $tang(45^\circ + \frac{1}{2}B)$.

129. Второй случай.—*По даннымъ двумъ катетамъ b и c вычислить гипотенузу a и два косыхъ угла B и C.*

Для вычисленія воспользуемся формулами

$$\cos a=\cos b\cos c,\ \operatorname{tang} B=\frac{\operatorname{tang} b}{\sin c},\ \operatorname{tang} C=\frac{\operatorname{tang} c}{\sin b}.$$

Если сторона a плохо опредѣляется по своему косинусу, то слѣдуетъ начать съ вычисленія B или C; затѣмъ получимъ a по одной изъ формулъ

$$\operatorname{tang} a=\frac{\operatorname{tang} c}{\cos B},\ \operatorname{tang} a=\frac{\operatorname{tang} b}{\cos C}.$$

Замѣчаніе.—Задача всегда допускаетъ только одно рѣшеніе.

130. Третій случай.—*По даннымъ гипотенузѣ a и косому углу B вычислить другой уголъ C и два катета b и c.*

Воспользуемся формулами

$$\sin b=\sin a\sin B,\ \operatorname{tang} c=\operatorname{tang} a\cos B,\ \operatorname{tang} C=\frac{\cot B}{\cos a}.$$

Если сторона b плохо опредѣляется по своему синусу, то слѣдуетъ начать съ вычисленія c или C; затѣмъ найдемъ b по одной изъ формулъ

$$\operatorname{tang} b=\sin c\operatorname{tang} B,\ \operatorname{tang} b=\operatorname{tang} a\cos C.$$

Замѣчаніе.—Задача всегда возможна и допускаетъ только одно рѣшеніе, такъ какъ неизвѣстная сторона b и данный уголъ B будутъ одновременно меньше или больше 90 градусовъ.

131. Четвертый случай.—*По данному катету b и противолежащему углу B вычислить стороны a и c, а также и уголъ C.*

Можно воспользоваться формулами n° 115:

$$\sin a=\frac{\sin b}{\sin B},\quad \sin c=\frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} B},\quad \sin C=\frac{\cos B}{\cos b},$$

но еще лучше воспользоваться слѣдующими формулами n° 116:

$$\operatorname{tang}(45^\circ+\tfrac{1}{2}a)=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(B+b)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(B-b)}},$$

$$\operatorname{tang}(45^\circ+\tfrac{1}{2}c)=\pm\sqrt{\frac{\sin(B+b)}{\sin(B-b)}},$$

$$\operatorname{tang}(45^\circ+\tfrac{1}{2}C)=\pm\sqrt{\cot\frac{1}{2}(B+b)\cot\frac{1}{2}(B-b)},$$

которыя даютъ три неизвѣстные элементы треугольника посредствомъ ихъ тангенсовъ.

Замѣчаніе.—Каждая изъ двухъ предыдущихъ системъ формулъ можетъ дать для каждой неизвѣстной по два пополнительныхъ значенія. Поэтому важно умѣть опредѣлить, какія значенія слѣдуетъ брать вмѣстѣ.

Во-первыхъ, если $b=B$, то будемъ имѣть

$$\sin a=\sin c=\sin C=1,\ a=c=C=90^\circ,$$

и треугольникъ будетъ имѣть два прямыхъ угла. И такъ, положимъ, что b отличается отъ B.

1° Если $b<90^\circ$, то, для того, чтобы задача была возможна, необходимо, чтобы уголъ B былъ также $<90^\circ$ и, кромѣ того, чтобы b было $<B$. Положимъ, что это условіе выполнено; такъ какъ $\cos b$ положительный, то уравненіе $\cos a=\cos b\cos c$ показываетъ, что a и c будутъ одновременно меньше или больше 90 градусовъ; но c и C также одновременно больше или меньше 90°, поэтому, если обозначимъ чрезъ a', c' и C' значенія, меньшія 90 градусовъ, получаемыя изъ таблицъ для a, c и C, то будемъ имѣть два рѣшенія:

$$a=a',\quad c=c',\quad C=C',$$
$$a=180^\circ-a',\quad c=180^\circ-c',\quad C=180^\circ-C'.$$

2° Если $b>90^\circ$, то условія возможности задачи будутъ: $B>90^\circ$ и $b>B$. Предположимъ, что они выполнены; такъ какъ $\cos b$ отрицательный, то уравненіе $\cos a=\cos b\cos c$ показываетъ, что изъ сторонъ a и c одна больше, а другая меньше 90 градусовъ; но c и C или оба больше, или оба меньше 90 градусовъ, а потому, если постоянно будемъ обозначать чрезъ a', c' и C' значенія a, c и C, получаемыя изъ таблицъ, получимъ слѣдующія два рѣшенія:

$$a=a',\quad c=180^\circ-c',\quad C=180^\circ-C',$$
$$a=180^\circ-a',\quad c=c',\quad C=C'.$$

Легко видѣть, *a priori*, что, исключая случая $b=B$, [задача, если только она возможна, допускаетъ два рѣшенія. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что прямоугольный треугольникъ ABC, въ которомъ уголъ A прямой, удовлетворяетъ вопросу (*см.* фиг. n° 109, ст. 137); продолживъ стороны AB и BC до ихъ встрѣчи въ B', составимъ второй прямоугольный треугольникъ $AB'C$, который также будетъ удовлетворять вопросу.

132. Пятый случай. — *По данной сторонѣ b и прилежащему углу C вычислить уголъ B и двѣ стороны a и c.*

Воспользуемся формулами

$$\cos B=\cos b\sin C,\ \operatorname{tang} a=\frac{\operatorname{tang} b}{\cos C},\ \operatorname{tang} c=\sin b\operatorname{tang} C.$$

Если уголъ B плохо опредѣляется по своему косинусу, то слѣдуетъ начать съ вычисленія a или c; затѣмъ найдемъ B по одной изъ формулъ

$$\cot B=\cos a\operatorname{tang} C,\ \cot B=\sin c\cot b.$$

Замѣчаніе.—Задача всегда возможна и допускаетъ только одно рѣшеніе.

133. Шестой случай.—*По даннымъ двумъ косымъ угламъ B и C вычислить три стороны a, b, c.*

Воспользуемся формулами n° 115

$$\cos a=\cot B\cot C,\ \cos b=\frac{\cos B}{\sin C},\quad \cos c=\frac{\cos C}{\sin B},$$

или лучше слѣдующими n° 116:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a=+\sqrt{\frac{\cos(180°-B-C)}{\cos(B-C)}},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b=+\sqrt{\operatorname{tang}\left(\frac{B+C}{2}-45°\right)\operatorname{tang}\left(\frac{B-C}{2}+45°\right)},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c=+\sqrt{\operatorname{tang}\left(\frac{B+C}{2}-45°\right)\operatorname{tang}\left(\frac{C-B}{2}+45°\right)},$$

которыя даютъ неизвѣстныя по ихъ тангенсамъ.

Замѣчаніе.—Для того, чтобы задача была возможна, необходимо и достаточно: 1° чтобы сумма $B+C$ заключалась между 90 и 270 градусами; 2° чтобы разность $B-C$ заключалась между $-90°$ и $+90°$. Когда эти условія выполнены, то вторыя части предыдущихъ формулъ будутъ вещественны и задача допускаетъ только одно рѣшеніе.

Рѣшеніе сферическихъ прямосторонних треугольниковъ.

134. Хотя рѣшеніе прямосторонняго треугольника можетъ быть, при помощи пополнительнаго треугольника, приведено къ рѣшенію треугольника прямоугольнаго, однако не безполезно указать формулы, соотвѣтствующія каждому изъ шести случаевъ, которые могутъ встрѣтиться. Мы ограничимся только этимъ простымъ указаніемъ, такъ какъ замѣчанія относительно этихъ формулъ и ихъ изслѣдованіе тѣ же, что и для прямоугольныхъ треугольниковъ. Уголъ,

противолежащій сторонѣ въ 90 градусовъ, будемъ постоянно обозначать буквою A.

135. Первый случай. — *По даннымъ угламъ A и B вычислить уголъ C и стороны b и c.*

Воспользуемся формулами n° 117

$$\cos C=-\frac{\cos A}{\cos B},\ \sin b=\frac{\sin B}{\sin A},\ \cos c=-\frac{\operatorname{tang} B}{\operatorname{tang} A};$$

но можно имъ дать слѣдующій видъ, который слѣдуетъ предпочесть:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C=+\sqrt{\cot\tfrac{1}{2}(A-B)\cot\tfrac{1}{2}(A+B)},$$

$$\operatorname{tang}(45°+\tfrac{1}{2}b)=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)}},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c=+\sqrt{\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}};$$

двойной знакъ $\pm$ во второй формулѣ опредѣлится изъ того соображенія, что b и B одновременно или меньше или больше 90 градусовъ.

136. Второй случай. — *По даннымъ двумъ угламъ B и C вычислить уголъ A и стороны b и c.*

Воспользуемся формулами

$$\cos A=-\cos B\cos C,\ \operatorname{tang} b=\frac{\operatorname{tang} B}{\sin C},\ \operatorname{tang} c=\frac{\operatorname{tang} C}{\sin B}.$$

Если уголъ A плохо опредѣляется по своему косинусу, то должно прежде всего вычислить b или c; затѣмъ уголъ A можно опредѣлить по одной изъ формулъ

$$\operatorname{tang} A=-\frac{\operatorname{tang} C}{\cos b},\ \operatorname{tang} A=-\frac{\operatorname{tang} B}{\cos c}.$$

137. Третій случай.—*По данному углу A и сторонѣ b вычислить сторону c и два угла B и C.*

Воспользуемся формулами

$$\sin B=\sin A\sin b,\ \operatorname{tang} C=-\operatorname{tang} A\cos b,\ \operatorname{tang} c=-\frac{\cot b}{\cos A}.$$

Если желаемъ опредѣлить B по тангенсу, то мы должны начать съ вычисленія c или C; затѣмъ найдемъ B по одной изъ формулъ

$$\operatorname{tang} B=\sin C\operatorname{tang} b,\ \operatorname{tang} B=-\operatorname{tang} A\cos c.$$

138. Четвертый случай. — *По данной сторонѣ b и противолежащему углу B вычислить сторону c и углы A и C.*

Воспользуемся формулами

$$\sin A = \frac{\sin B}{\sin b}, \quad \sin C = \frac{\tang B}{\tang b}, \quad \sin c = \frac{\cos b}{\cos B};$$

ихъ можно преобразовать въ слѣдующія:

$$\tang(45° + \tfrac{1}{2}A) = \pm\sqrt{\frac{\tang\tfrac{1}{2}(b+B)}{\tang\tfrac{1}{2}(b-B)}},$$

$$\tang(45° + \tfrac{1}{2}C) = \pm\sqrt{\frac{\sin(b+B)}{\sin(b-B)}},$$

$$\tang(45° + \tfrac{1}{2}c) = \pm\sqrt{\cot\tfrac{1}{2}(b+B)\cot\tfrac{1}{2}(b-B)}.$$

Два рѣшенія опредѣляются при помощи тѣхъ же соображеній которыми мы воспользовались въ n° 131.

139. Пятый случай. — *По данному углу B и сторонѣ c вычислить сторону b и два угла A и C.*

Воспользуемся формулами

$$\cos b = \cos B \sin c, \quad \tang A = -\frac{\tang B}{\cos c}, \quad \tang C = \sin B \tang c.$$

Если хотятъ опредѣлить сторону b по ея тангенсу, то слѣдуетъ начать съ вычисленія угла A или C; затѣмъ опредѣлятъ b по одной изъ формулъ

$$\cot b = -\cos A \tang c, \quad \cot b = \sin C \cot B.$$

140. Шестой случай.—*По даннымъ двумъ сторонамъ b и c вычислить три угла A, B, C.*

Формулы, относящіяся къ этому случаю, будутъ

$$\cos A = -\cot b \cot c, \quad \cos B = \frac{\cos b}{\sin c}, \quad \cos C = \frac{\cos c}{\sin b};$$

но лучше ихъ преобразовать въ слѣдующія:

$$\tang\tfrac{1}{2}A = +\sqrt{\frac{\cos(b-c)}{\cos(180° - b - c)}},$$

$$\tang\tfrac{1}{2}B = +\sqrt{\tang\left(-45° + \frac{b+c}{2}\right)\tang\left(45° + \frac{b-c}{2}\right)},$$

$$\tang\tfrac{1}{2}C = +\sqrt{\tang\left(-45° + \frac{b+c}{2}\right)\tang\left(45° - \frac{b-c}{2}\right)}.$$

Замѣчаніе о рѣшеніи какихъ бы то ни было сферическихъ треугольниковъ.

141. Рѣшеніе не однихъ только прямосторонніхъ треугольниковъ приводится къ рѣшенію прямоугольныхъ треугольниковъ; то же имѣемъ еще въ двухъ слѣдующихъ случаяхъ:

1° Если между данными элементами находятся двѣ равныя стороны a и b или два равныхъ угла A и B, то перпендикуляръ, опущенный изъ вершины C на сторону AB, раздѣлить треугольникъ ABC на два прямоугольныхъ треугольника, равныхъ между собою во всѣхъ ихъ частяхъ. Рѣшимъ одинъ изъ этихъ треугольниковъ, въ каждомъ изъ которыхъ кромѣ прямого угла извѣстны еще два элемента, и непосредственно получимъ неизвѣстные элементы предложеннаго треугольника.

2° Если между данными элементами находятся двѣ стороны a и b, или два угла A и B, сумма которыхъ равна 180 градусамъ, то, продолживъ стороны a и c до встрѣчи ихъ въ B', составимъ треугольникъ $AB'C$, въ которомъ двѣ стороны или два угла будутъ равны. Рѣшеніе треугольника $AB'C$, приводящееся, какъ мы видѣли, къ рѣшенію прямоугольнаго треугольника, влечетъ за собой рѣшеніе предложеннаго треугольника.

Рѣшеніе сферическихъ треугольниковъ вообще представляетъ шесть случаевъ; но три изъ этихъ случаевъ могутъ быть приведены къ тремъ другимъ при помощи разсмотрѣнія пополнительнаго треугольника и рѣшенія двухъ соотвѣтствующихъ случаевъ получаются посредствомъ аналогичныхъ формулъ. И такъ, въ дѣйствительности, существуютъ только три различныя задачи.

Рѣшеніе сферическаго треугольника, въ которомъ извѣстны три стороны или три угла.

142. Первый способъ.—Если даны три стороны, то углы можно вычислить по формуламъ (1), (2) или (3) n° 119; однако, слѣдуетъ предпочесть формулы (3), а именно:

$$\tang\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}},$$

$$\tang\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-b)}},$$

$$tang\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{sin(p-a)sin(p-b)}{sinp\,sin(p-c)}},$$

гдѣ p обозначаетъ полупериметръ $\frac{a+b+c}{2}$.

Если даны углы, то стороны можемъ вычислить по формуламъ (4), (5) или (6) n°120; слѣдуетъ предпочесть формулы (6), а именно:

$$tang\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\,sin(A-\tfrac{1}{2}\varepsilon)}{sin(B-\tfrac{1}{2}\varepsilon)sin(C-\tfrac{1}{2}\varepsilon)}},$$

$$tang\tfrac{1}{2}b=\sqrt{\frac{sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\,sin(B-\tfrac{1}{2}\varepsilon)}{sin(A-\tfrac{1}{2}\varepsilon)sin(C-\tfrac{1}{2}\varepsilon)}},$$

$$tang\tfrac{1}{2}c=\sqrt{\frac{sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\,sin(C-\tfrac{1}{2}\varepsilon)}{sin(A-\tfrac{1}{2}\varepsilon)sin(B-\tfrac{1}{2}\varepsilon)}},$$

гдѣ ε обозначаетъ сферическій избытокъ $A+B+C-180°$.

Замѣчаніе.—Чтобы треугольникъ былъ возможенъ, когда даны три стороны, необходимо и достаточно: 1° чтобы сумма этихъ трехъ сторонъ была меньше 360 градусовъ; 2° чтобы каждая изъ сторонъ была меньше суммы двухъ другихъ. Когда даны три угла, то для возможности треугольника необходимо и достаточно: 1° чтобы сферическій избытокъ, получаемый изъ данныхъ угловъ, заключался между нулемъ и 360 градусами; 2° чтобы каждый изъ данныхъ угловъ былъ больше половины сферическаго избытка. Эти результаты сферической геометріи выводятся непосредственно изъ нашихъ формулъ.

Когда условія, о которыхъ только что была рѣчь, не всѣ выполнены, то выраженія тангенсовъ неизвѣстныхъ полу-угловъ или тангенсовъ неизвѣстныхъ полу-сторонъ даютъ для этихъ тангенсовъ мнимыя значенія.

143. Второй способъ.—Когда мы должны вычислить три неизвѣстные элемента, то вмѣсто предыдущихъ формулъ можно взять еще формулы (8), (9) и (10) n°124.

Если воспользуемся этими новыми формулами, то намъ придется, какъ и при рѣшеніи по предыдущему способу, отыскать только четыре логариѳма; но онѣ представляютъ ту выгоду, что, вычисливъ отдѣльно четыре количества $A-\frac{1}{2}\varepsilon$, $B-\frac{1}{2}\varepsilon$, $C-\frac{1}{2}\varepsilon$ и $\frac{1}{2}\varepsilon$ или p, $p-a$, $p-b$, $p-c$, будемъ имѣть средство для повѣрки точности полученныхъ результатовъ.

144. Примѣръ.—*Даны три стороны*

$a=113°2'56'',64$,

$b=82°39'28'',40$,

$c=74°54'31'',06$;

требуется опредѣлить углы A, B, C.

Первый способъ.

Образецъ вычисленія.

$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$....	$135°18'28'',05$
$p-a$	$22°15'31'',41$
$p-b$	$52°38'59'',65$
$p-c$.....	$60°23'56'',99$
$logsinp$	$\bar{1},8471394$
$logsin(p-a)$.....	$\bar{1},5783980$
$logsin(p-b)$	$\bar{1},9003361$
$logsin(p-c)$.....	$\bar{1},9392635$

Вычисленіе угла A.

$$tang\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{sin(p-b)sin(p-c)}{sinp\,sin(p-a)}}.$$

$logsin(p-b)$	$\bar{1},9003361$
$logsin(p-c)$.....	$\bar{1},9392635$
$-logsin(p-a)$	$0,4216020$
$-logsinp$	$0,1528606$
	$0,4140622$
$logtang\frac{1}{2}A$.....	$0,2070311$
$\frac{1}{2}A$	$58°10'1'',10$
A.....	$116°20'2'',20$

Вычисленіе угла B.

$$tang\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{sin(p-a)sin(p-c)}{sinp\,sin(p-b)}}.$$

$logsin(p-a)$	$\bar{1},5783980$
$logsin(p-c)$.....	$\bar{1},9392635$
$-logsin(p-b)$.....	$0,0996639$
$-logsinp$.....	$0,1528606$
	$\bar{1},7701860$
$logtang\frac{1}{2}B$	$\bar{1},8850930$
$\frac{1}{2}B$	$37°30'25'',80$
B	$75°\ 0'51'',60$

Вычисленіе угла C.

$$tang\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{sin(p-a)sin(p-b)}{sinp\,sin(p-c)}}.$$

$logsin(p-a)$	$\bar{1},5783980$
$logsin(p-b)$,.....	$\bar{1},9003361$
$-logsin(p-c)$	$0,0607365$
$-logsinp$.....	$0,1528606$
	$\bar{1},6923312$
$logtang\frac{1}{2}C$.	$\bar{1},8461656$
$\frac{1}{2}C$	$35°3'29'',58$
C	$70°6'59'',16$

Второй способъ.

[Формулы (8) и (9) n° 124]

Образецъ вычисленія.

$\frac{1}{2}p$	67°39′14″,025
$\frac{1}{2}(p-a)$	11° 7′45″,705
$\frac{1}{2}(p-b)$	26°19′29″,825
$\frac{1}{2}(p-c)$	30°11′58″,495

Вычисленіе сферическаго избытка ε.

$\log tang\frac{1}{2}p$	0,3860840
$\log tang\frac{1}{2}(p-a)$	$\overline{1}$,2938583
$\log tang\frac{1}{2}(p-b)$	$\overline{1}$,6944058
$\log tang\frac{1}{2}(p-c)$	$\overline{1}$,7649261
	$\overline{1}$,1392742
$\log tang\frac{1}{4}\varepsilon$	$\overline{1}$,5696371
$\frac{1}{4}\varepsilon$	20°21′58″,25
ε	81°27′53″,00

Вычисленіе угла B.

$\log tang\frac{1}{2}(p-a)$	$\overline{1}$,2938583
$\log tang\frac{1}{2}(p-c)$	$\overline{1}$,7649261
$\log cot\frac{1}{2}(p-b)$	0,3055942
$\log cot\frac{1}{2}p$	$\overline{1}$,6139160
	$\overline{2}$,9782946
$\log tang(\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon)$	$\overline{1}$,4891473
$\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon$	17° 8′27″,55
$\frac{1}{2}B$	37°30′25″,80
B	75° 0′51″,60

$\log tang\frac{1}{2}p$	0,3860840
$\log tang\frac{1}{2}(p-a)$	$\overline{1}$,2938583
$\log tang\frac{1}{2}(p-b)$	$\overline{1}$,6944058
$\log tang\frac{1}{2}(p-c)$	$\overline{1}$,7649261

Вычисленіе угла A.

$\log tang\frac{1}{2}(p-b)$	$\overline{1}$,6944058
$\log tang\frac{1}{2}(p-c)$	$\overline{1}$,7649261
$\log cot\frac{1}{2}(p-a)$	0,7061417
$\log cot\frac{1}{2}p$	$\overline{1}$,6139160
	$\overline{1}$,7793896
$\log tang(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon)$	$\overline{1}$,8896948
$\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon$	37°48′2″,87
$\frac{1}{2}A$	58°10′1″,12
A	116°20′2″,24

Вычисленіе угла C.

$\log tang\frac{1}{2}(p-a)$	$\overline{1}$,2938583
$\log tang\frac{1}{2}(p-b)$	$\overline{1}$,6944058
$\log cot\frac{1}{2}(p-c)$	0,2350739
$\log cot\frac{1}{2}p$	$\overline{1}$,6139160
	$\overline{2}$,8372540
$\log tang(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon)$	$\overline{1}$,4186270
$\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon$	14°41′31″,34
$\frac{1}{2}C$	35° 3′29″,59
C	70° 6′59″,18

Повѣрка:

$$\frac{1}{4}\varepsilon+(\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{4}\varepsilon)+(\tfrac{1}{2}B-\tfrac{1}{4}\varepsilon)+(\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{4}\varepsilon)=90°0'0'',01;$$

общая погрѣшность: 0″,01.

Рѣшеніе сферическаго треугольника, въ которомъ извѣстны двѣ стороны и уголъ между ними, или два угла и сторона между ними.

145. Первый способъ. — Если требуется опредѣлить три неизвѣстные элемента, то проще всего получить рѣшеніе задачи при помощи формулъ Нэпера, а именно:

$$(1)\qquad tang\tfrac{1}{2}(A+B)=cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{cos\frac{1}{2}(a-b)}{cos\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$(2)\qquad tang\tfrac{1}{2}(A-B)=cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{sin\frac{1}{2}(a-b)}{sin\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$(3)\qquad tang\tfrac{1}{2}(a+b)=tang\tfrac{1}{2}c\,\frac{cos\frac{1}{2}(A-B)}{cos\frac{1}{2}(A+B)},$$

$$(4)\qquad tang\tfrac{1}{2}(a-b)=tang\tfrac{1}{2}c\,\frac{sin\frac{1}{2}(A-B)}{sin\frac{1}{2}(A+B)}.$$

Если даны элементы a, b, и C, то прежде всего вычислимъ A и B при помощи формулъ (1) и (2); потомъ вычислимъ c при помощи одной изъ формулъ (3) или (4).

Если, напротивъ, даны элементы A, B и c, то вычислимъ a и b при помощи формулъ (3) и (4), а затѣмъ C при помощи одной изъ формулъ (1) и (2).

Замѣчаніе I.—Вычисленіе неизвѣстныхъ элементовъ A и B или a и b требуетъ отысканія пяти логариѳмовъ; затѣмъ еще нужны два новые логариѳма для полученія неизвѣстной c или C.

Замѣчаніе II.—Такъ какъ предполагается, что данныя заключаются между 0 и 180 градусами, то задача допускаетъ всегда только одно рѣшеніе.

146. Второй способъ. — Можно еще рѣшить предложенную задачу, воспользовавшись формулами, которыя мы вывели въ n° 109 и слѣдующихъ и которыя позволяютъ непосредственно вычислить каждую неизвѣстную, независимо отъ двухъ остальныхъ.

Если даны элементы a, b, C, то формулы, опредѣляющія неизвѣстные элементы, будутъ

$$(1)\qquad \begin{cases} cot\,a\,sin\,b-cot\,A\,sin\,C=cos\,b\,cos\,C,\\ cot\,b\,sin\,a-cot\,B\,sin\,C=cos\,a\,cos\,C,\\ cos\,c=cos\,a\,cos\,b+sin\,a\,sin\,b\,cos\,C. \end{cases}$$

Вычислимъ, какъ было сказано въ n° 118, два вспомогательные угла φ и ψ, заключающіеся между 0 и 180 градусами, такіе, чтобы

(2) $$tang\varphi = tang a \cos C,\quad tang\psi = tang b \cos C;$$

тогда двѣ первыя формулы (1) примутъ видъ

(3) $$tang A = \frac{\sin\varphi \, tang C}{\sin(b-\varphi)},\quad tang B = \frac{\sin\psi \, tang C}{\sin(a-\psi)}.$$

Одинъ изъ вспомогательныхъ угловъ φ и ψ можетъ послужить для вычисленія c; такъ какъ, на основаніи формулъ (2), третье уравненіе (1) даетъ

(4) $$\cos c = \frac{\cos a \cos(b-\varphi)}{\cos\varphi},\quad \cos c = \frac{\cos b \cos(a-\psi)}{\cos\psi}.$$

Можетъ случиться, что сторона c плохо опредѣляется по своему косинусу; въ такомъ случаѣ вычислимъ сперва A и B и потомъ можемъ получить c по тангенсу; дѣйствительно, если двѣ формулы

$$\sin c = \frac{\sin a \sin C}{\sin A} \text{ и } \sin c = \frac{\sin b \sin C}{\sin B}$$

раздѣлимъ соотвѣтственно на уравненія (4), то, принимая во вниманіе формулы (2) и (3), будемъ имѣть

(5) $$tang c = \frac{tang(b-\varphi)}{\cos A},\quad tang c = \frac{tang(a-\psi)}{\cos B}.$$

Если даны элементы A, B, c, то формулы, которыя опредѣлятъ неизвѣстные элементы, будутъ

(1 *bis*)
$$\begin{cases} \cot a \sin c - \cot A \sin B = \cos c \cos B, \\ \cot b \sin c - \cot B \sin A = \cos c \cos A, \\ \cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c; \end{cases}$$

вычислимъ два такіе вспомогательные угла φ и ψ, заключающіеся между нулемъ и 180 градусамъ, чтобы

(2 *bis*) $$tang\varphi = -tang A \cos c,\quad tang\psi = -tang B \cos c;$$

два первыя уравненія (1 *bis*) дадутъ

(3 *bis*) $$tang a = -\frac{\sin\varphi \, tang c}{\sin(B-\varphi)},\quad tang b = -\frac{\sin\psi \, tang c}{\sin(A-\psi)}.$$

Третье уравненіе (1 *bis*) также дастъ

(4 *bis*) $$\cos C = -\frac{\cos A \cos(B-\varphi)}{\cos\varphi},\quad \cos C = -\frac{\cos B \cos(A-\psi)}{\cos\psi};$$

изъ этихъ же уравненій, принимая во вниманіе формулы

$$\sin C = \frac{\sin c \sin A}{\sin a},\quad \sin C = \frac{\sin c \sin B}{\sin b},$$

найдемъ, наконецъ,

(5 *bis*) $$tang C = -\frac{tang(B-\varphi)}{\cos a},\quad tang C = -\frac{tang(A-\psi)}{\cos b}.$$

Надо замѣтить, что формулы (1 *bis*), (2 *bis*), (3 *bis*), (4 *bis*), (5 *bis*) выводятся изъ формулъ (1), (2), (3), (4), (5), если замѣнимъ въ послѣднихъ A, B, C, a, b, c пополненіями a, b, c, A, B, C, а также φ, ψ ихъ пополненіями. Два только что разсмотрѣнные нами треугольника дѣйствительно пополнительные.

Замѣчаніе.—Когда даны элементы a, b, C, то вычисленіе одного угла A или B требуетъ отысканія пяти логариѳмовъ, какъ и при первомъ способѣ. Вычисленіе стороны c, при помощи одной изъ формулъ (4), требуетъ также пяти логариѳмовъ; но когда требуется опредѣлить только одну эту сторону, то второй способъ предпочтительнѣе перваго. Точно также, когда даны элементы A, B, c, то предыдущій способъ представляетъ удобство только относительно угла C, если требуется вычислить одинъ этотъ элементъ.

147. Третій способъ.—Способъ, о которомъ мы будемъ говорить, исключительно относится къ тому случаю, когда хотятъ вычислить только одно неизвѣстное: c или C. Въ предыдущемъ способѣ для этого прибѣгали къ одной изъ формулъ (4) или (4 *bis*), опредѣляющихъ неизвѣстный элементъ по косинусу. Можетъ случиться, что этотъ элементъ не можетъ быть опредѣленъ этимъ способомъ съ достаточною точностію, и тогда надо произвести вычисленіе слѣдующимъ образомъ:

Если неизвѣстна сторона c, то уравненіе, которое служитъ для ея опредѣленія, можетъ быть написано такъ:

$$\cos c = \cos(a-b) - 2\sin a \sin b \sin^2\tfrac{1}{2}C,$$

или

$$\sin^2\tfrac{1}{2}c = \sin^2\tfrac{1}{2}(a-b) + \sin a \sin b \sin^2\tfrac{1}{2}C;$$

если вычислимъ такой вспомогательный уголъ ω, чтобы

$$tang\omega = \frac{\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}\sqrt{\sin a \sin b},$$

то c получимъ по формулѣ

$$\sin\tfrac{1}{2}c = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(a-b)}{\cos\omega}.$$

Если неизвѣстенъ уголъ C, то будемъ имѣть

$$\cos C = -\cos(A+B) - 2\sin A \sin B \sin^2\tfrac{1}{2}c,$$

или

$$\sin^2\tfrac{1}{2}C = \cos^2\tfrac{1}{2}(A+B) + \sin A \sin B \sin^2\tfrac{1}{2}c;$$

вспомогательный уголъ ω вычислимъ по формулѣ

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\sin\tfrac{1}{2}c}{\cos\tfrac{1}{2}(A+B)}\sqrt{\sin A \sin B},$$

а затѣмъ получимъ C по формулѣ

$$\sin\tfrac{1}{2}C = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(A+B)}{\cos\omega}.$$

Замѣчаніе.—Этотъ третій способъ, какъ и предыдущій, требуетъ только пяти логариѳмовъ для вычисленія c или C.

148. Примѣръ.—*Даны стороны a, b и уголъ между ними C, а именно:*

$$a = 113°2'56'',64,\quad b = 82°39'28'',40,\quad C = 138°50'13'',69;$$

требуется вычислить углы A, B и сторону c.

Образецъ вычисленія.

$\frac{1}{2}(a-b)$	$15°11'44'',12$
$\frac{1}{2}(a+b)$	$97°51'12'',52$
$\frac{1}{2}C$	$69°25'\ 6'',845$

$\log\sin\frac{1}{2}(a-b)$	$\bar{1},4184917$
$\log\cos\frac{1}{2}(a-b)$	$\bar{1},9845439$
$\log\sin\frac{1}{2}(a+b)$	$\bar{1},9959074$
$\log-\cos\frac{1}{2}(a+b)$	$\bar{1},1355787$
$\log\cot\frac{1}{2}C$	$\bar{1},5746163$

Вычисленіе $\frac{1}{2}(A+B)$.

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B) = \cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}(a-b)}{\cos\tfrac{1}{2}(a+b)}.$$

$\log\cot\frac{1}{2}C$	$\bar{1},5746163$
$\log\cos\frac{1}{2}(a-b)$	$\bar{1},9845439$
$-\log-\cos\frac{1}{2}(a+b)$ ...	$0,8644213$
$\log-\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)$ ..	$0,4235815$
$\frac{1}{2}(A+B)$	$110°39'35'',29$

Вычисленіе $\frac{1}{2}(A-B)$.

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-B) = \cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a-b)}{\sin\tfrac{1}{2}(a+b)}.$$

$\log\cot\frac{1}{2}C$	$\bar{1},5746163$
$\log\sin\frac{1}{2}(a-b)$	$\bar{1},4184917$
$-\log\sin\frac{1}{2}(a+b)$	$0,0040926$
$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)$	$\bar{2},9972006$
$\frac{1}{2}(A-B)$	$5°40'26'',91$

Вычисленіе угловъ A и B.

$\frac{1}{2}(A+B)$	$110°39'35'',29$
$\frac{1}{2}(A-B)$	$5°40'26'',91$
A	$116°20'\ 2'',20$
B	$104°59'\ 8'',38$

$\log-\cos\frac{1}{2}(A+B)$	$\bar{1},5475513$
$\log\cos\frac{1}{2}(A-B)$	$\bar{1},9978668$

Вычисленіе стороны c.

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b)\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}(A+B)}{\cos\tfrac{1}{2}(A-B)}.$$

$\log\sin\frac{1}{2}(a+b)$	$\bar{1},9959074$
$-\log-\cos\frac{1}{2}(a+b)$ ...	$0,8644213$
$\log-\cos\frac{1}{2}(A+B)$	$\bar{1},5475513$
$-\log\cos\frac{1}{2}(A-B)$	$0,0021332$
$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}c$	$0,4100132$
$\frac{1}{2}c$	$68°44'32'',30$
c	$137°29'\ 4'',60$

Рѣшеніе сферическаго треугольника, въ которомъ даны двѣ стороны и уголъ, противолежащій одной изъ нихъ, или два угла и сторона, противолежащая одному изъ нихъ.

149. Первый способъ.—Пусть даны элементы a, b и A или A, B и a. Сперва вычислимъ B или b по формулѣ

$$\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin a},$$

а затѣмъ можемъ вычислить соотвѣтственное значеніе C или c при помощи формулъ Нэпера, а именно:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C = \frac{\cot\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(a-b)}{\cos\tfrac{1}{2}(a+b)} = \frac{\cot\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\tfrac{1}{2}(a-b)}{\sin\tfrac{1}{2}(a+b)},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c = \frac{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\tfrac{1}{2}(A+B)}{\cos\tfrac{1}{2}(A-B)} = \frac{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a-b)\sin\tfrac{1}{2}(A+B)}{\sin\tfrac{1}{2}(A-B)}.$$

Для возможности задачи прежде всего необходимо, чтобы синусъ неизвѣстнаго элемента B или b заключался между нулемъ и единицей; когда это условіе выполнено, то для B или b существуютъ два пополнительныя одно другому значенія; но, чтобы одно изъ этихъ значеній соотвѣтствовало задачѣ, необходимо, чтобы соотвѣтствующія значенія $\operatorname{tang}\frac{1}{2}C$ и $\operatorname{tang}\frac{1}{2}c$ были положительныя, а это требуетъ, чтобы разности $A-B$ и $a-b$ имѣли одни и тѣ же знаки.

Если этому условію не удовлетворяетъ ни одно изъ двухъ значеній B или b, то задача не допускаетъ ни одного рѣшенія; но если этому условію по крайней мѣрѣ одно изъ этихъ двухъ значеній удовлетворяетъ, то непремѣнно существуетъ соотвѣтствующее рѣшеніе. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $A-B$ и $a-b$ будутъ одного знака. то мы получимъ, при помощи двухъ формулъ Нэпера, для C и для c значенія, заключающіяся между 0 и 180 градусами; эти значенія для C и c будутъ тѣ же, что и даваемыя двумя другими формулами Нэпера, такъ какъ эти послѣднія непосредственно выводятся изъ двухъ первыхъ, при посредствѣ соотношеній:

$$\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin a} \text{ или } \frac{tang\frac{1}{2}(A+B)}{tang\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{tang\frac{1}{2}(a+b)}{tang\frac{1}{2}(a-b)}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что значенія, найденныя для B или b, для C и для c, удовлетворяютъ четыремъ формуламъ Нэпера. Поэтому, если требуется рѣшить треугольникъ по даннымъ a, b, C (задачу, которая всегда возможна), то необходимо найдемъ для искомыхъ элементовъ значенія A, B, c.

Два случая, которые мы здѣсь разсмотрѣли, называются *сомнительными случаями сферическихъ треугольниковъ*, такъ какъ мы не можемъ быть увѣрены относительно того изъ значеній B или b, которое соотвѣтствуетъ разсматриваемому треугольнику. Но въ приложеніяхъ эта неувѣренность всегда исчезаетъ, если мы внимательно изслѣдуемъ обстоятельства рѣшаемой задачи.

150. Второй способъ.—Предыдущимъ способомъ слѣдуетъ пользоваться только въ томъ случаѣ, когда дѣло идетъ объ опредѣленіи элементовъ B или b только съ однимъ изъ двухъ элементовъ C и c. Для вычисленія элемента B или b нужны три логариѳма и, если предположимъ, что этотъ элементъ извѣстенъ, то требуется три новыхъ логариѳма, чтобы опредѣлить C или c.

Когда требуется вычислить три неизвѣстныхъ, то опредѣлимъ, какъ выше показано, элементъ B или b и, если этотъ элементъ будетъ извѣстенъ, то можемъ получить C и c при помощи формулъ (11) и (12) n° 123, которыя требуютъ отысканія только четырехъ логариѳмовъ.

Полагая, такимъ образомъ,

$$A+B=S+180°,\ A-B=D,$$
$$a+b=s+180°,\ a-b=d,$$

затѣмъ

$$M=tang\frac{S+d}{4}tang\frac{S-d}{4},\ N=tang\frac{s+D}{4}tang\frac{s-D}{4},$$

будемъ имѣть, при помощи формулъ (11) n° 123,

$$tang\frac{C-c}{4}=\pm\sqrt{MN},\ tang\frac{C+c}{4}=+\sqrt{\frac{M}{N}},$$

при чемъ корень долженъ быть взятъ въ первой формулѣ со знакомъ количествъ M и N.

Можно воспользоваться формулами (12) n° 123 вмѣсто формулъ (11) и замѣтимъ, что нѣтъ никакого основанія предпочесть однѣ другимъ. Когда предложенная задача допускаетъ два рѣшенія, то, воспользовавшись, какъ мы это только что сдѣлали, формулами (11) для вычисленія одного треугольника, можемъ обратиться къ формуламъ (12) для вычисленія элементовъ второго треугольника, для чего не потребуется ни одного новаго логариѳма.

Дѣйствительно, обозначая чрезъ C' и c' значенія C и c, которыя соотвѣтствуютъ второму треугольнику, замѣняемъ въ формулахъ (12) n° 123 B чрезъ $180°-B$ или b чрезъ $180°-b$, что приводитъ насъ къ перестановкѣ буквъ S и D или s и d, смотря потому, даны ли въ задачѣ a, b, A или A, B, a. Тогда, положивъ для краткости,

$$M'=tang\frac{s+D}{4}cot\frac{s-D}{4},\ N'=cot\frac{S+d}{4}tang\frac{S-d}{4},$$

будемъ имѣть

$$tang\left(\frac{C'-c'}{4}\pm45°\right)=\pm\sqrt{M'N'},\ tang\left(\frac{C'+c'}{4}+45°\right)=\pm\sqrt{\frac{M'}{N'}}.$$

Когда даны a, b, A, то слѣдуетъ взять верхніе знаки въ обѣихъ частяхъ первой формулы, а знакъ передъ корнемъ во второй формулѣ будетъ тотъ же, что и количествъ M' и N'. Наоборотъ, если даны A, B, a, то слѣдуетъ взять нижніе знаки въ обѣихъ частяхъ первой формулы, а корень второй формулы долженъ быть взятъ со знакомъ, обратнымъ знаку количествъ M' и N'.

Замѣчаніе. — Мы видимъ, что для полнаго рѣшенія задачи, даже въ случаѣ, когда она приводитъ къ двумъ треугольникамъ, которые желаютъ вычислить, требуется только семь логариѳмовъ.

151. Третій способъ. — Наиболѣе простое рѣшеніе задачи, которою мы занимаемся, мы получимъ при помощи трехъ фурмулъ, въ каждой изъ которыхъ заключаются данныя значенія и одно не-

извѣстное. Способъ этотъ, требующій вычисленія двухъ вспомогательныхъ угловъ, есть тотъ, которымъ слѣдуетъ пользоваться въ большинствѣ случаевъ.

Положимъ, что даны a, b, A; формулы, опредѣляющія неизвѣстныя, будутъ

$$(1)\qquad \begin{cases} \sin B = \dfrac{\sin b \sin A}{\sin a}, \\ \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cot a \sin b - \cot A \sin C = \cos b \cos C. \end{cases}$$

Каждая изъ нихъ даетъ возможность непосредственно вычислить одно изъ неизвѣстныхъ и въ то же время она доставляетъ средство узнать, возможенъ ли треугольникъ при данныхъ элементахъ. Дѣйствительно, изъ n° 149 слѣдуетъ, что если можно получить изъ первой формулы такое значеніе для B, при которомъ разность $A-B$ имѣетъ тотъ же знакъ, что и разность $a-b$, то будетъ существовать рѣшеніе задачи, соотвѣтствующее этому значенію B. Точно такъ же, если вторая формула доставляетъ значеніе для c, заключающееся между 0 и 180 градусами, то, очевидно, получимъ рѣшеніе задачи, соотвѣтствующее этому значенію, такъ какъ треугольникъ, образованный сторонами b, c и угломъ A, будетъ удовлетворять даннымъ условіямъ. Также, наконецъ, если можно получить изъ третьей формулы значеніе для C, заключающееся между 0 и 180 градусами, то непремѣнно будетъ существовать рѣшеніе задачи, соотвѣтствующее этому значенію, такъ какъ мы можемъ всегда построить треугольникъ по элементамъ a, b, C.

Первая формула системы (1) удобна для логариѳмированія; чтобы получить c и C, опредѣлимъ два вспомогательныхъ угла φ и ψ, заключающіеся между 0 и 180 градусами и при томъ такіе, чтобы

$$(2)\qquad \operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang} b \cos A, \quad \operatorname{tang}\psi = \frac{\cot A}{\cos b};$$

тогда двѣ послѣднія формулы (1) дадутъ:

$$(3)\qquad \cos(c-\varphi) = \frac{\cos a \cos\varphi}{\cos b}, \quad \cos(C-\psi) = \cot a \operatorname{tang} b \cos\psi.$$

Для возможности предложенной задачи, необходимо, чтобы значеніе $\sin B$ было меньше 1, и чтобы значенія $\cos(c-\varphi)$ и $\cos(C-\psi)$

заключались между -1 и $+1$; легко убѣдиться, что эти условія выражаются однимъ неравенствомъ

$$\frac{\sin b \sin A}{\sin a} < 1.$$

Если это неравенство удовлетворяется, то можно вычислить, при помощи первой формулы (1), для B значеніе M, заключающееся между 0 и 90 градусами, и при помощи формулъ (3) для $c-\varphi$ и $C-\psi$ значенія N и P, заключающіяся между 0 и 180 градусами. Но эти уравненія также будутъ удовлетворятся, если примемъ $B = 180° - M$, $c-\varphi = -N$, $C-\psi = -P$; не трудно опредѣлить, въ каждомъ случаѣ, значенія B, C и c, которыя надлежитъ брать вмѣстѣ, чтобы получить треугольникъ, отвѣчающій вопросу. Дѣйствительно, если введемъ вспомогательные углы φ и ψ въ формулы

$$\cot b \sin c - \cot B \sin A = \cos c \cos A,$$
$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b,$$

то онѣ примутъ видъ

$$(4)\qquad \sin(c-\varphi) = \sin\varphi \frac{\operatorname{tang} A}{\operatorname{tang} B}, \quad \sin(C-\psi) = \sin\psi \frac{\cos B}{\cos A},$$

а это показываетъ, что разности $c-\varphi$ и $C-\psi$ имѣютъ одинаковые знаки. Изъ формулъ (4) также видимъ, что, если эти разности положительны, то углы A и B или оба меньше, или оба больше 90 градусовъ, между тѣмъ какъ, если $c-\varphi$ и $C-\psi$ отрицательны, то одинъ изъ угловъ A и B меньше, а другой больше 90 градусовъ. Послѣ этого, значенія B, C, c, которыя надлежитъ брать вмѣстѣ, будутъ

$$\left.\begin{array}{lll} B = M, & c = \varphi + N, & C = \psi + P, \\ B = 180° - M, & c = \varphi - N, & C = \psi - P, \end{array}\right\} \text{если } A < 90°,$$

$$\left.\begin{array}{lll} B = 180° - M, & c = \varphi + N, & C = \psi + P, \\ B = M, & c = \varphi - N, & C = \psi - P, \end{array}\right\} \text{если } A > 90°,$$

и каждое изъ этихъ двухъ сочетаній навѣрное будетъ отвѣчать треугольнику, за исключеніемъ того случая, когда значенія c или C, которыя въ нихъ входятъ, не заключаются между нулемъ и 180 градусами.

Если раздѣлимъ первое и второе уравненія (4) соотвѣтственно на первое и второе уравненія (3), то, принимая во вниманіе уравненія (2) и первое уравненіе (1), найдемъ

(5) $$tang(c-\varphi)=tang\,a\cos B,\quad tang(C-\psi)=\frac{\cot B}{\cos a},$$

откуда

(6) $$tang(c-\varphi)=\sin b\sin A\,tang(C-\psi).$$

Когда требуется вычислить три неизвѣстныхъ элемента, то предполагая, что мы получили элементъ B при помощи формулы (1), для окончанія рѣшенія треугольника можемъ съ выгодою воспользоваться формулами (5) и (6); въ самомъ дѣлѣ, эти формулы требуютъ однимъ логариѳмомъ меньше, чѣмъ формулы (3), и опредѣляютъ разности $c-\varphi$ и $C-\psi$ по ихъ тангенсамъ. При вычисленіи можно принимать эти разности за положительныя, т. е. какъ соотвѣтственно равныя $+N$ и $+P$, но тогда, взявъ для B значеніе M, мы должны перемѣнить знаки вторыхъ частей формулъ (5) на обратные, если уголъ A больше 90 градусовъ.

152. Точно такъ же мы будемъ поступать, если даны A, B, a. Формулы, которыя опредѣляютъ неизвѣстныя, будутъ:

(1) $$\begin{cases}\sin b=\dfrac{\sin B\sin a}{\sin A},\\ \cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a,\\ \cot a\sin c-\cot A\sin B=\cos c\cos B.\end{cases}$$

Первая формула удобна для логариѳмированія; для того чтобы опредѣлить C и c, вычислимъ два такихъ вспомогательныхъ угла ψ, φ, заключающихся между 0 и 180 градусами, чтобы

(2) $$tang\,\psi=-tang\,B\cos a,\quad tang\,\varphi=-\frac{\cot a}{\cos B};$$

тогда двѣ послѣднія формулы (1) примутъ видъ

(3) $$\cos(C-\psi)=-\frac{\cos A\cos\psi}{\cos B},\quad \cos(c-\varphi)=-\cot A\,tang\,B\cos\varphi.$$

Если условіе

$$\frac{\sin B\sin a}{\sin A}<1.$$

удовлетворяется, то предыдущее значеніе $\sin b$ будетъ меньше 1; точно также значенія $\cos(C-\psi)$ и $\cos(c-\varphi)$ будутъ заключаться между -1 и $+1$, почему изъ таблицъ получимъ для b значеніе M, заключающееся между нулемъ и 90 градусами, равно какъ и для $c-\varphi$ и $C-\psi$ значенія N и P, заключающіяся между нулемъ и 180 градусами; но также удовлетворимъ уравненіямъ, если возьмемъ $b=180°-M$, $C-\psi=-P$, $c-\varphi=-M$. Введеніе угловъ ψ и φ въ формулы

$$\cot b\sin a-\cot B\sin C=\cos a\cos C,$$
$$\cos b=\cos a\cos c+\sin a\sin c\cos B$$

даетъ

(4) $$\sin(C-\psi)=-\sin\psi\frac{tang\,a}{tang\,b},\quad \sin(c-\varphi)=-\sin\varphi\frac{\cos b}{\cos a};$$

отсюда слѣдуетъ, что разности $C-\psi$ и $c-\varphi$ имѣютъ одни и тѣ же знаки; также мы видимъ, что когда эти разности отрицательны, то стороны a и b будутъ обѣ или меньше, или больше 90 градусовъ; если же $c-\varphi$ и $C-\psi$ положительны, то одна изъ сторонъ a и b меньше, а другая больше 90 градусовъ. Отсюда слѣдуетъ, что значенія b, C, c, которыя надо брать вмѣстѣ, будутъ

$$\left.\begin{array}{llll} b=M, & C=\psi+P, & c=\varphi+N,\\ b=180°-M, & C=\psi-P, & c=\varphi-N,\end{array}\right\}\ \text{если } a>90°,$$

и

$$\left.\begin{array}{llll} b=180°-M, & C=\psi+P, & c=\varphi+N,\\ b=M, & C=\psi-P, & c=\varphi-N\end{array}\right\}\ \text{если } a<90°.$$

Ни одно изъ этихъ двухъ рѣшеній не существуетъ, если значеніе C или c, имъ соотвѣтствующее, не заключается между нулемъ и 180 градусами.

Изъ формулъ (3) и (4) выводимъ формулы

(5) $$tang(C-\psi)=-tang\,A\cos b,\quad tang(c-\varphi)=-\frac{\cot b}{\cos A}$$

и

(6) $$tang(C-\psi)=\sin a\sin B\,tang(c-\varphi),$$

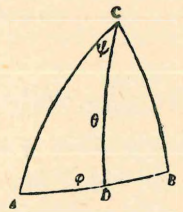
которыя облегчаютъ рѣшеніе треугольника, когда сторона b будетъ опредѣлена.

Всѣ эти формулы подобны тѣмъ, которыя мы получили въ п° 151. Переходимъ отъ однѣхъ къ другимъ, замѣняя a, b, c, A, B, C, φ, ψ, соотвѣтственно чрезъ A, B, C, a, b, c, $180°-\psi$, $180°-\varphi$; и дѣйствительно, мы здѣсь были заняты рѣшеніемъ треугольника пополнительнаго тому, которымъ мы занимались въ п° 151.

153. Четвертый способъ. — Введеніе вспомогательныхъ угловъ φ и ψ, которыми мы воспользовались въ предыдущемъ способѣ, равносильно съ разложеніемъ треугольника ABC на два прямоуголь-

ныхъ или на два прямосторонних треугольника при помощи дуги CD большого круга (фиг. 31), проведенной изъ вершины C къ

Фиг. 31.



противолежащей сторонѣ AB. Въ самомъ дѣлѣ, если дуга CD образуетъ прямой уголъ со стороною AB, то прямоугольный треугольникъ ACD даетъ

$$tang\,AD = tang\,b\cos A,\quad cot\,ACD = \cos b\,tang\,A;$$

если же, наоборотъ, дуга CD проведена такимъ образомъ, что ея длина равна квадранту, то треугольникъ BCD будетъ прямосторонній, и онъ дастъ

$$tang\,BD = -\frac{cot\,a}{\cos B},\quad tang\,BCD = -tang\,B\cos a,$$

откуда слѣдуетъ, что углы, обозначенные чрезъ φ и ψ въ n° 151, соотвѣтственно равны AD и ACD, тогда какъ углы, обозначенные тѣми же буквами φ и ψ въ n° 152, соотвѣтственно равны BD и BCD.

Способъ, основанный на разложеніи даннаго треугольника на два прямоугольныхъ или прямосторонних треугольника, который мы будемъ здѣсь разсматривать, въ сущности не отличается отъ только что разсмотрѣннаго нами; однако, необходимо замѣтить, что можно избѣжать употребленія синусовъ и косинусовъ для вычисленія неизвѣстныхъ элементовъ.

Разсмотримъ, въ самомъ дѣлѣ, тотъ случай, когда даны элементы a, b, A. Обозначивъ чрезъ Θ перпендикуляръ CD, опущенный изъ C на AB, рѣшимъ прямоугольный треугольникъ ACD при помощи формулъ

$$(1)\qquad \begin{cases} tang\,\varphi = tang\,b\cos A,\quad cot\,\psi = \cos b\,tang\,A, \\ tang\,\Theta = \sin\varphi\,tang\,A = \cos\psi\,tang\,b, \end{cases}$$

послѣ чего изъ прямоугольнаго треугольника BCD, въ которомъ извѣстны гипотенуза a и сторона Θ, опредѣлимъ три элемента

$CBD = B$ или $180° - B$, $BD = \pm(c-\varphi)$, $BCD = \pm(C-\psi)$;

мы можемъ приложить къ рѣшенію треугольника BCD вторую систему формулъ, относящихся къ первому случаю прямоугольныхъ треугольниковъ, и такимъ образомъ будемъ имѣть, вслѣдствіе неопредѣленности знаковъ разностей $c-\varphi$, $C-\psi$:

$$(2)\qquad \begin{cases} tang(45° + \tfrac{1}{2}B) = \pm\sqrt{\dfrac{tang\,\frac{1}{2}(a+\Theta)}{tang\,\frac{1}{2}(a-\Theta)}}, \\ tang\,\frac{1}{2}(c-\varphi) = \pm\sqrt{tang\,\frac{1}{2}(a-\Theta)\,tang\,\frac{1}{2}(a+\Theta)}, \\ tang\,\frac{1}{2}(C-\psi) = \pm\sqrt{\dfrac{\sin(a-\Theta)}{\sin(a+\Theta)}}. \end{cases}$$

Чтобы получить аналогичныя формулы, которыя соотвѣтствовали бы случаю, когда даны A, B, a, достаточно, въ формулахъ (1) и (2), замѣнить A, B, C, a, b, c, φ, ψ, Θ соотвѣтственно пополненіями a, b, c, A, B, C, ψ, φ, Θ.

Рѣшеніе при помощи этого послѣдняго способа, очевидно, менѣе просто, чѣмъ при помощи предыдущаго.

154. Примѣръ. — *Даны стороны a, b и уголъ A, противолежащій первой сторонѣ, а именно:*

$$a = 113°\ 2'56'',64,$$
$$b = 82°39'28'',40,$$
$$A = 116°20'\ 2'',20;$$

требуется вычислить углы B, C и сторону c.

Образецъ вычисленія.

Вычисленіе угла B.

$$\sin B = \frac{\sin b\sin A}{\sin a}.$$

$log\sin b$	$\overline{1},9964245$
$-log\sin a$	$0,0361320$
$log\sin A$	$\overline{1},9524164$
$log\sin B$	$\overline{1},9849729$

$$B \ldots\ldots \begin{cases} 75°\ 0'51'',60 = M \\ 104°59'\ 8'',40 = 180° - M. \end{cases}$$

Вычисленіе угла C.

$$tang\psi = \frac{\cot A}{\cos b},\ tang P = -\frac{\cot M}{\cos a}.$$

$$C = \psi \pm P.$$

$log—\cot A$	$\bar{1},6945773$
$—log\cos b$.....	$0,8934910$
$log—tang\psi$	$0,5880683$
ψ	$104°28'36'',44$
$log\cot M$	$\bar{1},4276177$
$—log—\cos a$.....	$0,4072468$
$log tang P$.....	$\bar{1},8348645$
P.....	$34°21'37'',25$
$C=\psi\pm P$...	$70°\ 6'59'',19$ и $138°50'13'',69$

Вычисленіе стороны c.

$$tang\varphi = tang b\cos A = \sin b \sin A\, tang\psi,$$
$$tang N = \sin b \sin A\, tang P,$$
$$c = \varphi \pm N.$$

$log\sin b$.....	$\bar{1},9964245$
$log\sin A$	$\bar{1},9524164$
$log—tang\psi$	$0,5880683$
$log—tang\varphi$.....	$0,5369092$
φ.....	$106°11'47'',85$
$log\sin b$.....	$\bar{1},9964245$
$log\sin A$.....	$\bar{1},9524164$
$log tang P$.....	$\bar{1},8348645$
$log tang N$.....	$\bar{1},7837054$
N.....	$31°17'16'',79$
$c=\varphi\pm N$.....	$74°54'31'',06$ и $137°29'\ 4'',64$

Первое рѣшеніе:

$B=75°0'51'',60$, $C=70°6'59'',19$, $c=74°54'31'',06$.

Второе рѣшеніе:

$B=104°59'8'',40$, $C=138°50'13'',69$, $c=137°29'4'',64$.

Изслѣдованіе случаевъ, допускающихъ два рѣшенія.

155. Два послѣднихъ случая сферическихъ треугольниковъ единственные, которые могутъ допускать два рѣшенія, и, при томъ, не всегда. Формулы, относящіяся къ этимъ двумъ случаямъ, указываютъ на число рѣшеній и опредѣляютъ элементы каждаго изъ нихъ; однако не безынтересно разсмотрѣть различныя обстоятельства этихъ двухъ задачъ; но такъ какъ онѣ, какъ мы уже говорили, немедленно приводятся одна къ другой, то мы ограничимся здѣсь разсмотрѣніемъ того случая, когда даны двѣ стороны a, b и уголъ противолежащій одной изъ нихъ.

Если $a=b$, то также и $A=B$, и формулы Нэпера даютъ

$$\cot\tfrac{1}{2}C = tang A\cos a,\ tang\tfrac{1}{2}c = tang a\cos A.$$

Для возможности задачи, необходимо и достаточно, чтобы $tang A$ и $\cos a$, $\cos A$ и $tang a$ имѣли одни и тѣ же знаки, т. е. если $A>90°$, то и $a>90°$, и если $A<90°$, то и $a<90°$. Задача имѣетъ только одно рѣшеніе.

Перейдемъ къ общему случаю. Для возможности задачи необходимо, чтобы дробь $\frac{\sin b\sin A}{\sin a}$ была меньше 1; если это условіе выполнено, то будутъ два значенія для B, удовлетворяющихъ уравненію $\sin B = \frac{\sin b\sin A}{\sin a}$: одно M меньшее 90 градусовъ, а другое M' равное $180°—M$.

Чтобы одно изъ этихъ значеній B отвѣчало вопросу, необходимо и достаточно (n° 149), чтобы разности $A—B$ и $a—b$ имѣли одинъ и тотъ же знакъ. Такимъ образомъ, чтобы M отвѣчало вопросу, необходимо, чтобы разность $A—M$ имѣла тотъ же знакъ, что и разность $a—b$; точно также, чтобы M' отвѣчало вопросу, необходимо, чтобы разность $A—M'$ имѣла тотъ же знакъ, что и $a—b$.

1° Пусть $A<90°$ и $b<90°$.

Если $a<b$, то формула $\sin B = \frac{\sin b\sin A}{\sin a}$ даетъ $M>A$ и, подавно, $M'>A$; слѣдовательно, будутъ два рѣшенія.

Если $a>b$, то можетъ быть

$$a+b<180°,\ a+b=180°,\ a+b>180°.$$

Въ первомъ случаѣ, имѣемъ $b<180°—a$, $\sin b<\sin a$; тогда $M<A$; но такъ какъ $M'>A$, то существуетъ только одно рѣшеніе. Въ случаѣ, когда $a+b=180°$, $b=180°—a$, $\sin b=\sin a$; тогда $M=A$ и $M'>A$; слѣдовательно, нѣтъ ни одного рѣшенія. Въ случаѣ, когда $a+b>180°$, $b>180°—a$, $\sin b>\sin a$; тогда $M>A$ и, подавно, $M'>A$; слѣдовательно, нѣтъ ни одного рѣшенія.

2° Положимъ $A<90°$ и $b=90°$.

Формула $\sin B = \frac{\sin b\sin A}{\sin a}$ даетъ еще $M>A$, и, слѣдовательно, $M'>A$, если только a не равно 90 градусамъ, въ каковомъ случаѣ $M=A$. Такимъ образомъ будутъ два рѣшенія, если $a<90°$ и ни одного, если $a=$ или $>90°$.

3° Положимъ $A<90°$ и $b>90°$.

Если $a<b$, то можетъ быть

$$a+b<180°,\ a+b=180°,\ a+b>180°.$$

Въ первомъ случаѣ имѣемъ $b<180°-a$, $\sin b>\sin a$: тогда $M>A$ и, тѣмъ болѣе, $M'>A$, слѣдовательно, существуютъ два рѣшенія. Въ случаѣ, когда $a+b=180°$, $b=180°-a$, $\sin b=\sin a$, имѣемъ $M=A$, $M'>A$; слѣдовательно, будетъ только одно рѣшеніе. Въ случаѣ, когда $a+b>180°$, $b>180°-a$, $\sin b<\sin a$, имѣемъ $M<A$; но $M'>A$, слѣдовательно, будетъ одно рѣшеніе.

Если $a>b$, то $\sin a<\sin b$, такъ какъ a и b больше 90°; тогда $M>A$, и, подавно, $M'>A$; нѣтъ, слѣдовательно, ни одного рѣшенія.

Точно такъ же разсматриваются случаи, если предположимъ $A=90°$ или $A>90°$; всѣ результаты можно заключить въ слѣдующую таблицу:

$A<90°$

- $b<90°$
  - $a<b$ ..... 2 рѣшенія,
  - $a=b$ ..... 1 рѣшеніе,
  - $a<b$ и $a+b<180°$ ..... 1 рѣшеніе,
  - $a>b$ и $a+b=$ или $>180°$. ни одного;
- $b=90°$
  - $a<b$ ..... 2 рѣшенія,
  - $a=$ или $>b$ ..... ни одного;
- $b>90°$
  - $a<b$ и $a+b<180°$ ..... 2 рѣшенія,
  - $a<b$ и $a+b=$ или $>180°$. 1 рѣшеніе,
  - $a=$ или $>b$ ..... ни одного;

$A=90°$

- $b<90°$
  - $a=b$ или $<b$ ..... ни одного,
  - $a>b$ и $a+b<180°$ ..... 1 рѣшеніе,
  - $a>b$ и $a+b=$ или $>180°$. ни одного;
- $b=90°$
  - $a=b$ ..... безконечное число рѣшеній,
  - $a<b$ или $>b$ ..... ни одного;
- $b>90°$
  - $a<b$ и $a+b=$ или $<180°$. ни одного,
  - $a<b$ и $a+b>180°$ ..... 1 рѣшеніе,
  - $a=$ или $>b$ ..... ни одного;

$A>90°$

- $b<90°$
  - $a=$ или $<b$ ..... ни одного,
  - $a>b$ и $a+b=$ или $<180°$. 1 рѣшеніе,
  - $a>b$ и $a+b>180°$ ..... 2 рѣшенія;
- $b=90°$
  - $a=$ или $<b$ ..... ни одного,
  - $a>b$ ..... 2 рѣшенія;
- $b>90°$
  - $a<b$ и $a+b=$ или $<180°$. ни одного,
  - $a<b$ и $a+b>180°$ ..... 1 рѣшеніе,
  - $a=b$ ..... 1 рѣшеніе,
  - $a>b$ ..... 2 рѣшенія.

Задачи по сферической тригонометріи.

156. Задача I.—*Вычислить объемъ наклоннаго параллелепипеда, зная длину его реберъ и углы, составляемые этими ребрами.*

Пусть будутъ α, β, γ три ребра, которыя сходятся въ одной изъ вершинъ параллелепипеда. Изъ этой вершины, какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ единицѣ, опишемъ шаровую поверхность, которая пересѣчетъ плоскости, ограниченныя ребрами β и γ, γ и α, α и β, образуя, такимъ образомъ, сферическій треугольникъ. Стороны a, b, c этого треугольника будутъ составлять данные плоскіе углы трегранаго угла, который имѣетъ вершину въ центрѣ шара, а углы A, B, C будутъ равны двугранымъ угламъ того-же трегранаго угла.

Площадь основанія параллелепипеда равна $\alpha\beta\sin c$; слѣдовательно, если H обозначаетъ его высоту, то искомый объемъ V будетъ

$$V=\alpha\beta\sin c\times H.$$

Но если чрезъ вершину, изъ которой опущена высота H, проведемъ къ ребру α перпендикуляръ H' и соединимъ основаніе H' съ основаніемъ H, то эта послѣдняя прямая образуетъ съ H' уголъ, равный A, и изъ прямоугольныхъ треугольниковъ будемъ имѣть

$$H'=\gamma\sin b,\quad H=H'\sin A=\gamma\sin b\sin A;$$

слѣдовательно,

$$V=\alpha\beta\gamma\sin b\sin c\sin A.$$

Далѣе, полагая $a+b+c=2p$, будемъ имѣть (n° 119)

$$\sin\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}},$$

и, слѣдовательно,

$$\sin A=\frac{2}{\sin b\sin c}\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)};$$

почему

$$V=2\alpha\beta\gamma\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(a-b)\sin(p-c)};$$

можно также написать (n° 110)

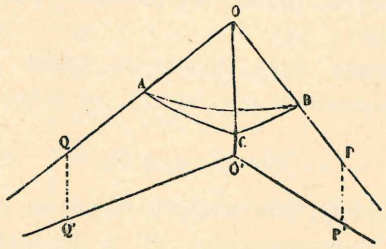
$$V=\alpha\beta\gamma\sqrt{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}.$$

Замѣчаніе.—Если взять шестую часть этого выраженія, то будемъ имѣть объемъ тетраэдра въ функціи трехъ сходящихся въ одной вершинѣ реберъ α, β, γ, и трехъ угловъ a, b, c, которые образуютъ эти ребра. Отсюда легко вывести выраженіе объема тетраэдра въ функціи шести его реберъ.

157. Задача II.—*Привести уголъ къ горизонту.*

Предположимъ, что наблюдатель, помѣстившійся въ точкѣ O (фиг. 32), измѣрилъ углы, образуемые вертикалью OO' съ лучами

Фиг. 32.



зрѣнія OP и OQ, направленными къ двумъ неподвижнымъ точкамъ P и Q, и что онъ также измѣрилъ уголъ POQ, образуемый этими лучами зрѣнія; требуется найти уголъ $P'O'Q'$, представляющій проекцію угла POQ на горизонтальную плоскость.

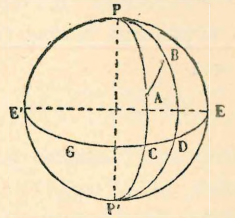
Если вообразимъ себѣ шаровую поверхность, описанную изъ

точки O, какъ центра, радіусомъ, равнымъ единицѣ, то она будетъ пересѣчена тремя плоскостями трегранаго угла O по линіямъ, образующимъ сферическій треугольникъ ABC, стороны котораго будутъ равны измѣреннымъ угламъ; тогда какъ искомый уголъ $P'O'Q'$ будетъ равенъ углу C этого сферическаго треугольника. Такимъ образомъ мы приведемъ задачу къ одному изъ случаевъ сферическихъ треугольниковъ, рѣшеніе котораго мы дали въ n° 142.

158. Задача III. — *По даннымъ широтамъ и долготамъ двухъ точекъ на поверхности земного шара найти разстояніе между этими двумя точками.*

Пусть (фиг. 33) P будетъ сѣверный полюсъ, P'—южный полюсъ, EGE'—экваторъ, и G—точка на экваторѣ, начиная отъ которой отсчитываются долготы. Предположимъ, что GE будетъ направ-

Фиг. 33.



леніе восточныхъ долготъ, а GE' — западныхъ долготъ. Пусть $PACP'$ и $PBDP'$ будутъ меридіаны, проходящіе чрезъ двѣ данныя точки, которыхъ извѣстны широты AC и BD и долготы GC и GD; пусть, наконецъ, AB будетъ дуга большого круга, соединяющая точки A и B. Въ сферическомъ треугольникѣ PAB мы знаемъ уголъ P и двѣ стороны, заключающія этотъ уголъ. Въ самомъ дѣлѣ, уголъ P равенъ разности данныхъ долготъ, когда эти долготы обѣ восточныя или западныя; и тотъ же уголъ P равенъ суммѣ данныхъ долготъ или дополненію этой суммы до 360°, когда одна изъ долготъ восточная, а другая западная. Кромѣ того, сторона PA равна 90° — или +широта точки A, смотря по тому, будетъ ли эта широта сѣверная или южная, и точно такъ же сторона PB равна 90°— или +широта точки B.

Условимся, что долготы будутъ положительны, или отрицательны, смотря по тому, будутъ ли онѣ восточныя или западныя, и, равнымъ

образомъ, что широты будутъ положительны или отрицательны, смотря по тому, будутъ ли онѣ сѣверныя или южныя. Если обозначимъ чрезъ L и L' долготы точекъ A и B, чрезъ λ и λ' широты тѣхъ же точекъ, то сторону $AB=x$ можемъ вычислить (146 и 147) по одной изъ двухъ формулъ

$$\cos x = \frac{\sin\lambda \sin(\lambda'+\varphi)}{\cos\varphi}, \quad \sin\tfrac{1}{2}x = \pm\frac{\sin\tfrac{1}{2}(\lambda-\lambda')}{\cos\omega}.$$

Если воспользуемся первой формулой, то предварительно вычислимъ вспомогательный уголъ φ, при помощи формулы

$$\operatorname{tang}\varphi = \cot\lambda\cos(L'-L);$$

напротивъ того, если желаемъ воспользоваться угломъ ω, то вычислимъ его при помощи формулы

$$\operatorname{tang}\omega = \pm\frac{\sin\tfrac{1}{2}(L-L')}{\sin\tfrac{1}{2}(\lambda-\lambda')}\sqrt{\cos\lambda\cos\lambda'}.$$

Положимъ, что уголъ x выраженъ въ градусахъ, то, такъ какъ полуокружность земного меридіана равна 20000 километрамъ, длина AB въ километрахъ будетъ:

$$AB = \frac{x}{9}\times 1000.$$

159. Примѣръ. — *Требуется найти разстояніе между С.-Петербургомъ и Вальпарайзо, зная что:*

Для С.-Петербурга (Обсерваторія)

сѣв. шир.$=\lambda=59°56'30''$, вост. долг.$=L=27°58'13''$;

Для Вальпарайзо (F. S. Ant.)

южн. шир.$=\lambda'=-33°1'55''$, запад. дол.$=L'=-73°57'22''$.

Вычисленіе вспомогат. угла φ.

$\operatorname{tang}\varphi = \cot\lambda\cos(L'-L)$.

$\log\cot\lambda$	$\bar{1},7624599$
$\log-\cos(L'-L)$	$\bar{1},3152455$
$\log-\operatorname{tang}\varphi$	$\bar{1},0777054$
$180°-\varphi$	$6°49'11''$

Вычисленіе разстоянія x.

$$\cos x = \frac{\sin\lambda\sin(\lambda'+\varphi)}{\cos\varphi}.$$

$\log\sin\lambda$	$\bar{1},9372751$
$\log\sin(\lambda'+\varphi)$	$\bar{1},8067240$
$-\log-\cos\varphi$	$0,0030837$
$\log-\cos x$	$\bar{1},7470828$
x	$123°57'27''$
	13773 килом.

Упражненія.

I. Доказать, что, если соединить вершины сферическаго треугольника съ срединами противоположныхъ сторонъ дугами большихъ круговъ, то эти дуги пересѣкутся въ одной и той же точкѣ O. Если α обозначаетъ дугу, которая соединяетъ вершину A съ срединою стороны a, и если α' и α'' суть части α, заключающіяся, первая между вершиною A и точкою O, а вторая между точкою O и стороною a, то будемъ имѣть

$$\cos\alpha = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(b+c)\cos\tfrac{1}{2}(b-c)}{\cos\tfrac{1}{2}a}, \quad \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha''} = 2\cos\tfrac{1}{2}a.$$

II. Доказать, что большіе круги, проведенные чрезъ вершины сферическаго треугольника перпендикулярно къ противолежащимъ сторонамъ, пересѣкаются въ двухъ однѣхъ и тѣхъ же точкахъ. Найти длины дугъ, заключающихся между одною изъ точекъ ихъ пересѣченія и вершинами, или между вершинами и противолежащими сторонами.

III. Рѣшить прямоугольный сферическій треугольникъ, зная гипотенузу и радіусъ круга вписаннаго.

IV. Рѣшить сферическій треугольникъ, зная уголъ, противолежащую ему сторону и сумму или разность двухъ другихъ сторонъ.

V. Рѣшить сферическій треугольникъ, зная уголъ, одну изъ прилежащихъ сторонъ и сумму или разность двухъ другихъ сторонъ.

VI. Если въ сферическомъ треугольникѣ имѣемъ

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = 1.$$

то двѣ изъ трехъ сторонъ соотвѣтственно равны противолежащимъ угламъ, между тѣмъ какъ третья сторона равна пополненію противолежащаго угла; кромѣ того, тангенсъ одной изъ дугъ $45°+\frac{1}{2}a$, $45°+\frac{1}{2}b$, $45°+\frac{1}{2}c$ равенъ произведенію тангенсовъ двухъ другихъ дугъ. Требуется это доказать и рѣшить треугольникъ, когда извѣстны двѣ стороны, или одна сторона и сумма двухъ другихъ, или, наконецъ, одна сторона и разность двухъ другихъ сторонъ.

VII. Рѣшить сферическій треугольникъ, зная суммы, получаемыя отъ сложенія каждаго угла съ противолежащею ему стороною. Если, для краткости, положить

$$A+a=180°+2\alpha,\ B+b=180°+2\beta,\ C+c=180°+2\gamma$$

и

$$\alpha+\beta+\gamma=2\omega;$$

затѣмъ, опредѣливъ вспомогательный уголъ φ, заключающійся между нулемъ и 180 градусами, по формулѣ

$$tang\varphi = \frac{+2\sqrt{cos\omega\, cos(\omega-\alpha)cos(\omega-\beta)cos(\omega-\gamma)}}{sin\alpha\, sin\beta\, sin\gamma},$$

можемъ вычислить разности $A-a$, $B-b$ $C-c$ по формуламъ

$$tang\tfrac{1}{2}(A-a)=cot\alpha\, cos\varphi,$$
$$tang\tfrac{1}{2}(B-b)=cot\beta\, cos\varphi,$$
$$tang\tfrac{1}{2}(C-c)=cot\gamma\, cos\varphi.$$

ГЛАВА ПЯТАЯ.

ДОПОЛНЕНІЕ КЪ ТЕОРІИ КРУГОВЫХЪ ФУНКЦІЙ.

О мнимыхъ выраженіяхъ.

160. Обозначая чрезъ i, какъ принято, выраженіе $\sqrt{-1}$, будемъ называть *выраженіемъ мнимымъ* всякое выраженіе вида

$$A+Bi,$$

гдѣ A и B количества вещественныя положительныя, отрицательныя, нуль.

Когда мы знаемъ заранѣе, что два вещественныя количества A' и B' соотвѣтственно равны двумъ другимъ A и B, мы говоримъ, что выраженія $A+Bi$ и $A'+B'i$ равны.

Очевидно, что если мы перемножимъ почленно нѣсколько равенствъ вида

$$A+Bi=A'+B'i,$$

разсматривая i какъ вещественное число, то получимъ равенство, въ которомъ коэффиціенты при однѣхъ и тѣхъ же степеняхъ i будутъ равны; равенство не нарушится и тогда, когда понизимъ показателей i, превышающихъ 2, воспользовавшись для этого равенствомъ $i^2=-1$.

Каково бы ни было мнимое выраженіе $A+Bi$, мы можемъ всегда найти такое *положительное* количество ρ и такую дугу a, что будемъ имѣть

$$A=\rho\, cos a, \quad B=\rho\, sin a.$$

Въ самомъ дѣлѣ, положивъ

$$\rho=+\sqrt{A^2+B^2},$$

и

$$\cos a = \frac{A}{+\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin a = \frac{B}{+\sqrt{A^2+B^2}},$$

можемъ написать

$$A+Bi=\rho\cos a+i\rho\sin a$$

или

$$A+Bi=\rho(\cos a+i\sin a).$$

Когда мнимое выраженіе такимъ образомъ приведено къ виду $\rho(\cos a+i\sin a)$, то положительное число ρ называютъ его *модулемъ*, а дугу a его *аргументомъ*.

Модуль всякаго мнимаго выраженія вполнѣ опредѣленъ, но аргументъ его не вполнѣ опредѣленъ, такъ какъ мнимое выраженіе не измѣняется, когда прибавляютъ или отнимаютъ отъ его аргумента какое угодно цѣлое число окружностей.

Положительныя и отрицательныя числа могутъ быть разсматриваемы, какъ выраженія мнимыя, которыхъ модуль равенъ ихъ абсолютной величинѣ, а аргументъ есть четное или нечетное число полуокружностей, такъ какъ если положимъ, что A положительное число, то будемъ имѣть, для всякаго цѣлаго k,

$$+A=A(\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi),$$
$$-A=A[\cos(2k+1)\pi+i\sin(2k+1)\pi].$$

Для того чтобы два мнимыя выраженія были равны, необходимо и достаточно, чтобы ихъ модули были равны, а аргументы отличались другъ отъ друга на кратное число окружностей. Предположимъ, въ самомъ дѣлѣ, что выраженія $\rho(\cos a+i\sin a)$ и $\rho'(\cos a'+i\sin a')$ равны; имѣемъ

$$\rho\cos a=\rho'\cos a', \quad \rho\sin a=\rho'\sin a',$$

и если сложимъ эти равенства, предварительно возвысивъ ихъ въ квадратъ, то получимъ

$$\rho^2=\rho'^2, \text{ откуда } \rho=\rho';$$

такъ какъ модули равны, то дуги a и a' имѣютъ одни и тѣ же синусы и косинусы, слѣдовательно, они могутъ отличаться другъ отъ друга, если они не равны, только на кратное число окружностей.

Аргументы двухъ *сопряженныхъ* мнимыхъ выраженій такихъ, какъ $A+Bi$ и $A-Bi$, имѣютъ одни и тѣ же косинусы, тогда какъ

ихъ синусы равны, но съ обратными знаками; слѣдовательно, сумма этихъ аргументовъ равна кратному числу окружностей.

Дѣйствія надъ мнимыми выраженіями. — Формула Моавра для цѣлаго и положительнаго показателя.

161. Теорема.—*Произведеніе двухъ мнимыхъ выраженій будетъ мнимое выраженіе, модуль и аргументъ котораго соотвѣтственно равны произведенію модулей и суммѣ аргументовъ множителей.*

Разсмотримъ прежде всего два мнимыя выраженія

$$\cos a+i\sin a \text{ и } \cos b+i\sin b,$$

которыхъ модуль равенъ единицѣ. Если ихъ перемножимъ, то получимъ

$$(\cos a+i\sin a)(\cos b+i\sin b)$$
$$=\cos a\cos b+i(\sin a\cos b+\cos a\sin b)+i^2\sin a\sin b,$$

или, такъ какъ $i^2=-1$,

$$(\cos a+i\sin a)(\cos b+i\sin b)$$
$$=(\cos a\cos b-\sin a\sin b)+i(\sin a\cos b+\cos a\sin b).$$

Но мы знаемъ, что

$$\cos a\cos b-\sin a\sin b=\cos(a+b),$$
$$\sin a\cos b+\cos a\sin b=\sin(a+b);$$

слѣдовательно, можемъ написать

$$(\cos a+i\sin a)(\cos b+i\sin b)=\cos(a+b)+i\sin(a+b).$$

Пусть будутъ даны теперь два мнимыя выраженія $\rho(\cos a+i\sin a)$, $\rho'(\cos b+i\sin b)$, которыхъ модули соотвѣтственно будутъ ρ и ρ'; имѣемъ:

$$\rho(\cos a+i\sin a)\times\rho'(\cos b+i\sin b)$$
$$=\rho\rho'\times(\cos a+i\sin a)(\cos b+i\sin b),$$

и, слѣдовательно,

$$\rho(\cos a+i\sin a)\times\rho'(\cos b+i\sin b)$$
$$=\rho\rho'[\cos(a+b)+i\sin(a+b)].$$

Слѣдствіе I.—*Частное отъ дѣленія одного мнимаго выраженія на другое есть выраженіе мнимое, модуль и аргументъ котораго*

соотвѣтственно равны частному модулей и разности аргументовъ дѣлимаго и дѣлителя.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ два выраженія:

$$\rho(\cos a+i\sin a) \text{ и } \rho'(\cos b+i\sin b);$$

имѣемъ

$$\frac{\rho}{\rho'}[\cos(a-b)+i\sin(a-b)]\times\rho'(\cos b+i\sin b)=\rho(\cos a+i\sin a),$$

откуда

$$\frac{\rho(\cos a+i\sin a)}{\rho'(\cos b+i\sin b)}=\frac{\rho}{\rho'}[\cos(a-b)+i\sin(a-b)]$$

Слѣдствіе II.—*Модуль и аргументъ произведенія какого угодно числа мнимыхъ выраженій соотвѣтственно равны произведенію модулей и суммѣ аргументовъ сомножителей.*

Въ самомъ дѣлѣ, чтобы перемножить два первыхъ сомножителя, перемножаемъ ихъ модули и складываемъ ихъ аргументы. Чтобы умножить полученное произведеніе на третьяго сомножителя, должно умножить его модуль на модуль третьяго сомножителя и сложить его аргументъ съ аргументомъ третьяго сомножителя, и такъ дальше.

Слѣдствіе III.—*Чтобы возвысить мнимое выраженіе въ цѣлую и положительную степень m, должно возвысить модуль въ m-ую степень и умножить аргументъ на m.*

Это непосредственно вытекаетъ изъ слѣдствія II, если предположимъ, что всѣ перемножаемыя мнимыя выраженія равны между собою.

Въ частномъ случаѣ, когда дано мнимое выраженіе $\cos a+i\sin a$, модуль котораго равенъ единицѣ, имѣемъ:

$$(\cos a+i\sin a)^m=\cos ma+i\sin ma$$

Это равенство и называется формулою Моавра.

162. Теорема.—*Модуль суммы двухъ мнимыхъ выраженій содержится между суммою и разностью ихъ модулей.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть даны два мнимыя выраженія

$$\rho(\cos a+i\sin a),\ \rho'(\cos a'+i\sin a')$$

и положимъ

$$R(\cos A+i\sin A)=\rho(\cos a+i\sin a)+\rho'(\cos a'+i\sin a');$$

будемъ имѣть

$$R\cos A=\rho\cos a+\rho'\cos a',$$
$$R\sin A=\rho\sin a+\rho'\sin a'.$$

Если сложимъ эти равенства, предварительно возвысивъ ихъ въ квадратъ, и затѣмъ изъ обѣихъ частей полученнаго равенства извлечемъ квадратный корень, то получимъ

$$R=\sqrt{\rho^2+2\rho\rho'\cos(a-a')+\rho'^2};$$

слѣдовательно, будемъ имѣть

$$R\leqslant\sqrt{(\rho+\rho')^2} \text{ или } \leqslant\rho+\rho',$$
$$R\geqslant\sqrt{(\rho-\rho')^2} \text{ или } \geqslant\pm(\rho-\rho').$$

Отсюда выводимъ болѣе общую теорему:

Слѣдствіе.—*Модуль суммы какого угодно числа мнимыхъ выраженій не можетъ превышать суммы модулей тѣхъ же выраженій.*

Умноженіе дугъ.

163. Формула Моавра даетъ непосредственно значенія $\cos ma$ и $\sin ma$ въ функціяхъ $\cos a$ и $\sin a$. Въ самомъ дѣлѣ, если разложимъ правую часть равенства

$$\cos ma+i\sin ma=(\cos a+i\sin a)^m$$

и затѣмъ понизимъ показателей i, превосходящихъ 2, воспользовавшись равенствомъ $i^2=-1$, то получимъ

$$\cos ma+i\sin ma$$
$$=\Big[\cos^m a-\frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}a\sin^2 a$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4}a\sin^4 a-\ldots\Big]$$
$$+i\Big[\frac{m}{1}\cos^{m-1}a\sin a-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}a\sin^3 a$$
$$+\frac{m\ldots(m-4)}{1.2.3.4.5}\cos^{m-5}a\sin^5 a-\ldots\Big];$$

слѣдовательно, будемъ имѣть

$$(1)\quad \begin{cases} \cos ma = \cos^m a - \dfrac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}a\sin^2 a \\ \qquad + \dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4}a\sin^4 a - \ldots \\ \sin ma = m\cos^{m-1}a\sin a - \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}a\sin^3 a \\ \qquad + \dfrac{m(m-1)\ldots(m-4)}{1.2.3.4.5}\cos^{m-5}a\sin^5 a - \ldots. \end{cases}$$

Эти формулы даютъ значенія $\cos ma$ и $\sin ma$ въ функціи $\cos a$ и $\sin a$. Замѣняя послѣдовательно $\sin a$ чрезъ $\sqrt{1-\cos^2 a}$ и $\cos a$ чрезъ $\sqrt{1-\sin^2 a}$, получимъ выраженія $\cos ma$ и $\sin ma$ въ функціи только или $\cos a$, или $\sin a$; дальше мы выведемъ эти выраженія, а здѣсь ограничимся слѣдующимъ важнымъ замѣчаніемъ.

Члены правыхъ частей равенствъ (1) всѣ m-ой степени относительно $\sin a$ и $\cos a$; первое изъ этихъ равенствъ заключаетъ только четныя степени $\sin a$ и четныя или нечетныя степени $\cos a$, смотря по тому, будетъ ли m четное или нечетное. Второе равенство, напротивъ того, содержитъ только нечетныя степени $\sin a$ и нечетныя или четныя степени $\cos a$, смотря потому, будетъ ли m четное или нечетное. Отсюда можемъ вывести заключенія:

1° Что $\cos ma$ и $\dfrac{\sin ma}{\sin a}$, выраженныя въ функціи $\cos a$, являются цѣлыми раціональными многочленами; первый многочленъ m-ой степени, а второй $(m-1)$-ой степени; всѣ члены каждаго многочлена будутъ одного измѣренія;

2° Что $\cos ma$ и $\dfrac{\sin ma}{\cos a}$, если m число четное, или $\sin ma$ и $\dfrac{\cos ma}{\cos a}$, если m число нечетное, выраженныя въ функціи $\sin a$, являются цѣлыми раціональными многочленами, первый многочленъ m-ой степени, а второй $(m-1)$-ой степени; всѣ члены этихъ многочленовъ будутъ одного измѣренія.

Если въ формулѣ

$$\cos ma + i\sin ma = (\cos a + i\sin a)^m$$

замѣнимъ a чрезъ $-a$, то получимъ

$$\cos ma - i\sin ma = (\cos a - i\sin a)^m;$$

и изъ двухъ предыдущихъ уравненій получимъ слѣдующія два выраженія для $\cos ma$ и $\sin ma$, которыя часто бываютъ полезны

$$(2)\quad \begin{cases} \cos ma = \dfrac{(\cos a + i\sin a)^m + (\cos a - i\sin a)^m}{2}, \\ \sin ma = \dfrac{(\cos a + i\sin a)^m - (\cos a - i\sin a)^m}{2i}. \end{cases}$$

Дѣля второе изъ уравненій (1) на первое, получимъ формулу

$$\frac{\sin ma}{\cos ma} = \frac{m\cos^{m-1}a\sin a - \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}\sin^3 a + \ldots.}{\cos^m a - \dfrac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}a\sin^2 a + \ldots}$$

$$= \frac{m\dfrac{\sin a}{\cos a} - \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\dfrac{\sin^3 a}{\cos^3 a} + \cdots}{1 - \dfrac{m(m-1)}{1.2}\dfrac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + \ldots},$$

или

$$(3)\quad \operatorname{tang} ma = \frac{m\operatorname{tang} a - \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\operatorname{tang}^3 a + \ldots}{1 - \dfrac{m(m-1)}{1.2}\operatorname{tang}^2 a + \dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\operatorname{tang}^4 a - \ldots},$$

которая даетъ выраженіе $\operatorname{tang} ma$ въ раціональной функціи $\operatorname{tang} a$.

Дѣленіе дугъ.

164. Предположимъ, сначала, что требуется опредѣлить $\cos\dfrac{a}{m} = x$, если извѣстно, что $\cos a = A$.

Если въ первомъ изъ равенствъ (1) n° 163 замѣнимъ a чрезъ $\dfrac{a}{m}$, а затѣмъ $\cos\dfrac{a}{m}$, $\sin\dfrac{a}{m}$ и $\cos a$ соотвѣтственно чрезъ x, $\sqrt{1-x^2}$ и A, то получимъ уравненіе вида

$$(1)\qquad f(x) - A = 0,$$

гдѣ $f(x)$ обозначаетъ многочленъ m-ой степени, всѣ члены котораго одного и того же измѣренія. Слѣдовательно, задача зависитъ отъ уравненія m-ой степени, что можно установить *a priori*. Пусть α будетъ какая нибудь изъ дугъ, косинусъ которыхъ будетъ A; значенія a будутъ заключаться въ формулѣ $2k\pi \pm \alpha$ и мы удовлетворимъ уравненію (1), взявъ для x косинусъ одной изъ дугъ

$$\frac{2k\pi}{m} + \frac{\alpha}{m}, \quad \frac{2k\pi}{m} - \frac{\alpha}{m},$$

гдѣ k обозначаетъ всегда цѣлое число. Если въ одной изъ этихъ формулъ даны числу k два значенія, разность которыхъ число кратное m, то получимъ двѣ дуги, которыя отличаются одна отъ другой на цѣлое число окружностей и которыя поэтому имѣютъ одинъ и тотъ же косинусъ; слѣдовательно, достаточно дать числу k какихъ угодно m послѣдовательныхъ значеній, напримѣръ, 0, 1, 2...., $m-1$. Даже безполезно разсматривать обѣ формулы, такъ какъ если дадимъ въ первой формулѣ k нѣкоторое значеніе k', а во второй—значеніе $m-k'$, то получимъ двѣ дуги, сумма которыхъ равна 2π и которыя, вслѣдствіе этого, имѣютъ одинъ и тотъ же косинусъ. Поэтому неизвѣстное x можетъ имѣть m значеній, которыя вообще различны; эти значенія будутъ значеніями косинусовъ m дугъ

$$\frac{\alpha}{m}, \frac{2\pi}{m}+\frac{\alpha}{m}, \frac{4\pi}{m}+\frac{\alpha}{m}, \ldots, \frac{2(m-1)\pi}{m}+\frac{\alpha}{m}.$$

Слѣдуетъ замѣтить, что если m будетъ число составное np, то рѣшеніе уравненія (1) m-ой степени приводится непосредственно къ рѣшенію двухъ уравненій, одного n-ой, а другого p-ой степени. Если, въ самомъ дѣлѣ, положимъ $\cos\frac{a}{n}=y$, то будемъ имѣть для опредѣленія x уравненіе p-ой степени

$$\psi(x)-y=0,$$

гдѣ y опредѣляется изъ уравненія n-ой степени

$$\omega(y)-A=0.$$

Уравненіе же (1) можно получить чрезъ исключеніе y изъ этихъ двухъ послѣднихъ уравненій. Точно также, если бы n было число составное qr, то рѣшеніе уравненія $\omega(y)-A=0$ приводилось бы къ рѣшенію двухъ уравненій q-ой и r-ой степеней и такъ дальше.

165. Опредѣлимъ теперь $\sin\frac{a}{m}=x$, если знаемъ, что $\sin a=A$.

Если во второмъ изъ равенствъ (1) n° 163 замѣнимъ a чрезъ $\frac{a}{m}$, затѣмъ $\sin\frac{a}{m}$, $\cos\frac{a}{m}$ и $\sin a$ чрезъ x, $\sqrt{1-x^2}$ и A, то получимъ, если m число нечетное, уравненіе вида

$$f(x)-A=0,$$

гдѣ $f(x)$ обозначаетъ цѣлый раціональный многочленъ m-ой степени, всѣ члены котораго будутъ нечетнаго измѣренія; мы видимъ, что задача зависитъ отъ уравненія m-ой степени. Но если m число четное, то получимъ уравненіе вида

$$\sqrt{1-x^2}f(x)=A,$$

гдѣ $f(x)$ обозначаетъ многочленъ $(m-1)$-ой степени, всѣ члены котораго будутъ нечетнаго измѣренія. Возвышая въ квадратъ обѣ части уравненія, получимъ

$$(1-x^2)[f(x)]^2-A^2=0;$$

мы видимъ, что задача зависитъ отъ уравненія $2m$-ой степени. Впрочемъ, степень этого уравненія можетъ быть понижена до m, если положимъ $x^2=\xi$, такъ какъ оно содержитъ только четныя степени x.

Мы придемъ къ тому же заключенію при помощи разсужденій, которыми уже раньше воспользовались. Если обозначимъ чрезъ α наименьшую положительную дугу, которой синусъ будетъ A, и чрезъ k какое угодно цѣлое число, то значенія x будутъ синусами дугъ

$$\frac{2k\pi}{m}+\frac{\alpha}{m}, \frac{(2k+1)\pi}{m}-\frac{\alpha}{m}.$$

Достаточно числу k дать m послѣдовательныхъ значеній, напримѣръ, 0, 1, 2,...., $m-1$, такъ какъ двумъ значеніямъ k, отличающимся другъ отъ друга на цѣлое число m, соотвѣтствуютъ въ каждой формулѣ двѣ дуги, которыя имѣютъ одинъ и тотъ же синусъ. Двѣ дуги, опредѣляемыя по одной и той же формулѣ, не могутъ имѣть одного и того же синуса, пока дуга α остается неопредѣленной, такъ какъ разность этихъ дугъ меньше 2π, а ихъ сумма, зависящая отъ α, не можетъ быть вообще приведена къ нечетному числу полуокружностей. Посмотримъ, могутъ ли двѣ такія дуги, какъ

$$\frac{2k\pi}{m}+\frac{\alpha}{m}, \frac{(2k'+1)\pi}{m}-\frac{\alpha}{m},$$

имѣть одинъ и тотъ же синусъ. Разность этихъ дугъ зависитъ отъ α и она вообще не будетъ кратнымъ числомъ окружности; ихъ сумма равна

$$\frac{2k+2k'+1}{m}\pi,$$

и она не можетъ быть кратнымъ числомъ полуокружности, если m число четное, слѣдовательно, въ этомъ случаѣ, x можетъ имѣть $2m$ различныхъ значеній. Но если m число нечетное, то можно всегда, каково бы ни было число k, заключающееся между нулемъ и m, найти цѣлое число k', заключающееся между тѣми же предѣлами, и такое, что будемъ имѣть

$$2k+2k'+1=m \text{ или } 3m,$$

то есть

$$k'=\frac{m-1}{2}-k \text{ или } =\frac{3m-1}{2}-k;$$

слѣдовательно, если m число нечетное, то x можетъ имѣть только m значеній. Легко убѣдиться въ томъ, что m дугъ каждой формулы имѣютъ въ случаѣ, когда m число четное, синусы по-парно равные, но имѣющіе обратные знаки.

Задача, только что разсмотрѣнная нами, даетъ поводъ къ тѣмъ же замѣчаніямъ, что и предыдущая; но мы ихъ не повторяемъ.

166. Можно также убѣдиться, что если данъ $\cos a$, то опредѣленіе $\sin\frac{a}{m}$ зависитъ отъ уравненія $2m$-ой степени, и что если данъ $\sin a$, то опредѣленіе $\cos\frac{a}{m}$ зависитъ отъ уравненія m-ой или $2m$-ой степени, смотря потому, будетъ ли m нечетное или четное. Наконецъ, когда данъ $\operatorname{tang} a$, то опредѣленіе $\operatorname{tang}\frac{a}{m}$ зависитъ во всѣхъ случаяхъ отъ уравненія m-ой степени.

Рѣшеніе двучленнаго уравненія $z^m=1$.

167. Постараемся опредѣлить корни двучленнаго уравненія

(1) $$z^m=1.$$

Если предложенное уравненіе допускаетъ мнимый корень, то этотъ корень будетъ имѣть модулемъ единицу (161, *Слѣдствіе III*) и будетъ, слѣдовательно, вида $\cos\varphi+i\sin\varphi$. Чтобы это выраженіе дѣйствительно было корнемъ, необходимо и достаточно, чтобы

$$\cos m\varphi+i\sin m\varphi=1,$$

то есть

$$\cos m\varphi=1,\quad \sin m\varphi=0,$$

или

$$m\varphi=2k\pi \text{ и } \varphi=\frac{2k\pi}{m},$$

гдѣ k обозначаетъ цѣлое число. Слѣдовательно, уравненію (1) удовлетворяютъ всѣ значенія z, заключающіяся въ формулѣ

(2) $$z=\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m}.$$

Чтобы два значенія k' и k'' числа k соотвѣтствовали двумъ равнымъ значеніямъ z, необходимо и достаточно (n° 160), чтобы разность аргументовъ $\frac{2k'\pi}{m}$, $\frac{2k''\pi}{m}$ была кратнымъ числомъ 2π или, другими словами, чтобы разность $k'-k''$ была числомъ кратнымъ m. И такъ, формула (2) даетъ m различныхъ значеній для z и ни коимъ образомъ не больше m; мы получимъ эти значенія, давая k какихъ нибудь m послѣдовательныхъ значеній, заключающихся между $-\infty$ и $+\infty$, напримѣръ,

$$0,\ 1,\ 2,\ldots,\ m-1.$$

Уравненіе (1) имѣетъ одинъ или два вещественныхъ корня смотря потому, будетъ ли m число не четное или четное; мнимые корни будутъ попарно сопряженные. Во всѣхъ случаяхъ, получаемъ два сопряженные корня, давая k два дополнительныя значенія относительно m въ формулѣ (2); такъ какъ, если замѣнимъ k чрезъ $m-k$, то эта формула приметъ видъ

$$z=\cos\frac{2k\pi}{m}-i\sin\frac{2k\pi}{m}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что m корней уравненія (1) заключаются также въ формулѣ

$$z=\cos\frac{2k\pi}{m}\pm i\sin\frac{2k\pi}{m},$$

гдѣ достаточно дать k значенія $0,\ 1,\ 2,\ldots,\ \frac{m}{2}$, если m число четное, и значенія $0,\ 1,\ 2,\ldots,\ \frac{m-1}{2}$, если m число нечетное. Въ первомъ случаѣ два вещественные корня соотвѣтствуютъ $k=0$ и $k=\frac{m}{2}$; во второмъ случаѣ вещественный корень соотвѣтствуетъ $k=0$.

168. Положимъ, что m будетъ нечетное число $2n+1$; степень уравненія $z^m-1=0$ можетъ быть понижена до n-ой степени. Въ самомъ дѣлѣ, если раздѣлимъ обѣ части уравненія на $z^n(z-1)$, то получимъ

$$\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)+\left(z^{n-1}+\frac{1}{z^{n-1}}\right)+\ldots+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0;$$

и если положимъ

$$z+\frac{1}{z}=x \quad \text{и} \quad z^n+\frac{1}{z^n}=V_n,$$

то легко найдемъ

$$V_n=xV_{n-1}-V_{n-2}.$$

Такъ какъ мы имѣемъ $V_0=2$ и $V_1=x$, то можемъ, воспользовавшись предыдущею формулою, выразить послѣдовательно V_2, V_3,... въ функціи x; такимъ образомъ найдемъ

$$V_2=x^2-2,$$
$$V_3=x^3-3x,$$
$$V_4=x^4-4x^2+2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и предложенное уравненіе преобразуется въ уравненіе n-ой степени

$$\varphi(x)=0.$$

Такъ какъ

$$z=\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m},$$

то

$$\frac{1}{z}=\cos\frac{2k\pi}{m}-i\sin\frac{2k\pi}{m};$$

и, слѣдовательно,

$$x=2\cos\frac{2k\pi}{m}.$$

Давая числу k послѣдовательно всѣ значенія $1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2}$, получимъ всѣ корни уравненія

$$\varphi(x)=0.$$

169. Свойства корней уравненія $z^m=1$. — 1°. Если положимъ

$$\alpha=\cos\frac{2\pi}{m}+i\sin\frac{2\pi}{m},$$

то будемъ имѣть по формулѣ Моавра

$$\alpha^k=\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m};$$

слѣдовательно, *m корней уравненія $z^m=1$ могутъ быть выражены такъ:*

$$\alpha^0,\ \alpha^1,\ \alpha^2,\ldots,\ \alpha^{m-1},$$

т. е. чрезъ степени одного изъ нихъ.

2° Если имѣемъ $m=np$, при чемъ n и p числа взаимно простыя между собою, то получимъ всѣ корни уравненія $z^m=1$, умножая n корней уравненія $z^n=1$ на p корней уравненія $z^p=1$.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ $\alpha=\cos\frac{2k\pi}{np}+i\frac{\sin 2k\pi}{np}$ корень уравненія $z^{np}=1$; такъ какъ n и p числа взаимно простыя между собою, то можно найти два такія цѣлыя числа ξ и η, что

$$p\xi+n\eta=k \text{ или } \frac{2\xi\pi}{n}+\frac{2\eta\pi}{p}=\frac{2k\pi}{np},$$

и тогда будемъ имѣть

$$\alpha=\left(\cos\frac{2\xi\pi}{n}+i\sin\frac{2\xi\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\eta\pi}{p}+i\sin\frac{2\eta\pi}{p}\right);$$

откуда заключаемъ, что всякій корень уравненія $z^{np}=1$ есть произведенія корня уравненія $z^n=1$ на корень уравненія $z^p=1$, слѣдовательно, *пр корней уравненія $z^{np}=1$ будутъ произведенія, которыя мы получимъ, умножая n корней уравненія $z^n=1$ на p корней уравненія $z^p=1$.*

3° *Алгебраическое рѣшеніе уравненія $z^m=1$, гдѣ m число составное, приводится къ рѣшенію уравненій того же вида, степени которыхъ будутъ простыя числа или степени простыхъ чиселъ, дѣлителей числа m.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $m=npq,\ldots$, гдѣ n, p, q,... суть простыя числа или степени не равныхъ простыхъ между собою чиселъ; мы получимъ корни уравненія $z^{np}=1$, умножая корни уравненія $z^n=1$ на корни уравненія $z^p=1$. Точно также мы получимъ корни уравненія $z^{npq}=1$, умножая корни уравненія $z^{np}=1$ на корни уравненія $z^q=1$, и такъ дальше. Отсюда можемъ заключить, что всѣ различные корни уравненія $z^m=1$ получатся, если умножимъ каж-

дый корень уравненія $z^n=1$ на каждый корень уравненія $z^p=1$, а затѣмъ каждый изъ вновь полученныхъ корней на корень уравненія $z^q=1$,...

О правильныхъ многоугольникахъ.

170. Возьмемъ окружность, раздѣленную на m равныхъ частей, и соединимъ послѣдовательно точки дѣленія; мы образуемъ правильный вписанный многоугольникъ о m сторонахъ. Если n есть число меньшее m и съ нимъ взаимно простое, то соединяя точки дѣленія чрезъ n точекъ или, что одно и то же, чрезъ $m-n$ точекъ, мы придемъ въ точку отправленія только послѣ того, какъ пройдемъ чрезъ всѣ вершины; фигуру, которую получимъ, назоветъ *правильнымъ звѣздчатымъ многоугольникомъ*. Но если m и n имѣютъ общаго дѣлителя Θ, то пройдемъ только чрезъ $\frac{m}{\Theta}$ вершинъ и полученная фигура будетъ правильный многоугольникъ только о $\frac{m}{\Theta}$ сторонахъ. Изъ этого мы видимъ, что существуетъ столько правильныхъ многоугольниковъ о m сторонахъ, сколько чиселъ взаимно простыхъ съ m и меньшихъ половины m.

Задача дѣленія окружности на m равныхъ частей приводится къ рѣшенію алгебраическаго двучленнаго уравненія

$$z^m=1,$$

такъ какъ мы видѣли, что корни этого уравненія даны при посредствѣ формулы

$$z=\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m}.$$

Кромѣ того $\frac{2k\pi}{m}$ есть дуга, стягиваемая стороною многоугольника, который получимъ, соединяя точки дѣленія чрезъ k точекъ, и, слѣдовательно, мы можемъ опредѣлить тригонометрическія линіи этой дуги, если рѣшимъ уравненіе $z^m=1$.

Наконецъ, мы видѣли, что если m есть число составное, то рѣшеніе уравненія $z^m=1$ приводится къ рѣшенію уравненій того же вида, при чемъ степени этихъ уравненій суть числа простыя или степени простыхъ чиселъ, дѣлителей числа m; слѣдовательно, задача

дѣленія окружности на m равныхъ частей можетъ быть также упрощена.

Разсмотримъ случай дѣленія окружности на 3, 5, 15 и 17 равныхъ частей.

171. Дѣленіе окружности на три равныя части. — Оно зависитъ отъ уравненія

$$z^3-1=0;$$

исключивъ корень 1, получимъ

$$z^2+z+1=0,$$

и, полагая $z+\frac{1}{z}=x$,

$$x+1=0.$$

Корень этого уравненія, равный -1, будетъ $2\cos\frac{2\pi}{3}$ (n° 168) или $-2\cos\frac{\pi}{3}$, или $-2\sin\frac{\pi}{6}$; слѣдовательно, имѣемъ

$$2\sin\frac{\pi}{6}=1.$$

Полученное число выражаетъ сторону правильнаго вписаннаго шестиугольника; отсюда легко выводимъ выраженіе для стороны равносторонняго треугольника.

172. Дѣленіе окружности на пять равныхъ частей. — Оно зависитъ отъ уравненія

$$z^5-1=0;$$

исключивъ корень 1 и полагая $z+\frac{1}{z}=x$, получимъ

$$x^2+x-1=0,$$

корни котораго равны (n° 168)

$$2\cos\frac{2\pi}{5},\quad 2\sin\frac{4\pi}{5},$$

или

$$2\sin\frac{\pi}{10},\quad 2\sin\frac{3\pi}{10}.$$

Кромѣ того, рѣшая уравненіе, найдемъ $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, слѣдовательно,

$$2\sin\frac{\pi}{10}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\quad 2\sin\frac{3\pi}{10}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Эти числа выражаютъ стороны правильныхъ десятиугольниковъ выпуклаго и звѣздчатаго; не трудно получить числа, выражающія стороны правильныхъ пятиугольниковъ выпуклаго и звѣздчатаго.

173. Дѣленіе окружности на пятнадцать равныхъ частей.—Оно зависитъ отъ уравненія

$$z^{15}-1=0, \tag{1}$$

изъ котораго должно исключить корни уравненій $z^3-1=0$ и $z^5-1=0$; раздѣливъ поэтому данное уравненіе на $\frac{(z^3-1)(z^5-1)}{z-1}$, получимъ

$$z^8-z^7+z^5-z^4+z^3-z+1=0. \tag{2}$$

Наконецъ, если раздѣлимъ лѣвую часть уравненія на z^4 и положимъ $z+\frac{1}{z}=x$, то получимъ

$$x^4-x^3-4x^2+4x+1=0; \tag{3}$$

корни этого уравненія будутъ (n° 168)

$$2\cos\frac{2\pi}{15},\quad 2\cos\frac{4\pi}{15},\quad 2\cos\frac{8\pi}{15},\quad 2\cos\frac{14\pi}{15},$$

или

$$2\sin\frac{11\pi}{30},\quad 2\sin\frac{7\pi}{30},\quad -2\sin\frac{\pi}{30},\quad -2\sin\frac{13\pi}{30}.$$

Эти числа по абсолютному значенію выражаютъ стороны правильныхъ многоугольниковъ выпуклаго и звѣздчатаго о тридцати сторонахъ.

Пятнадцать корней уравненія (1) получаются отъ умноженія корней уравненія $z^3-1=0$ на корни уравненія $z^5-1=0$ (n° 169); отсюда легко заключаемъ, что восемь корней уравненія (2) получаются отъ умноженія двухъ корней уравненія $z^2+z+1=0$ на четыре корня уравненія $z^4+z^3+z^2+z+1=0$, которые мы можемъ легко найти; такимъ образомъ мы опредѣлимъ восемь корней уравненія (2) и, слѣдовательно, корни уравненія (3). Между прочимъ очень простыя соображенія позволяютъ убѣдиться въ томъ, что (3) уравненіе есть результатъ исключенія y изъ двухъ уравненій

$$x^2-yx+(y-2)=0,\quad y^2-y-1=0,$$

такъ что рѣшеніе его приводится къ рѣшенію двухъ уравненій второй степени.

174. Дѣленіе окружности на семнадцать равныхъ частей. — Оно зависитъ отъ уравненія

$$z^{17}-1=0.$$

Если раздѣлимъ первую часть уравненія на $z-1$ и затѣмъ примемъ $z+\frac{1}{z}=x$, то получимъ

$$x^8+x^7-7x^6-6x^5+15x^4+10x^3-10x^2-4x+1=0; \tag{1}$$

примемъ для краткости

$$a=\frac{2\pi}{17};$$

корни уравненія (1) тогда будутъ

$$2\cos a,\quad 2\cos 3a,\quad 2\cos 8a,\quad 2\cos 7a,$$
$$2\cos 4a,\quad 2\cos 5a,\quad 2\cos 2a,\quad 2\cos 6a.$$

Положимъ

$$y_1=2\cos a+2\cos 8a+2\cos 4a+2\cos 2a,$$
$$y_2=2\cos 3a+2\cos 7a+2\cos 5a+2\cos 6a;$$

я говорю, что y_1 и y_2 суть корни уравненія второй степени, коэффиціенты котораго цѣлыя числа. Дѣйствительно, на основаніи уравненія (1) имѣемъ сначала

$$y_1+y_2=-1;$$

затѣмъ, перемножая y_1 и y_2, преобразовывая произведенія косинусовъ въ суммы по извѣстнымъ формуламъ и принимая во вниманіе тождество $\cos(17-m)a=\cos ma$, найдемъ

$$y_1y_2=4(2\cos a+2\cos 8a+2\cos 4a+2\cos 2a$$
$$+2\cos 3a+2\cos 7a+2\cos 5a+2\cos 6a)$$

и, въ силу уравненія (1),

$$y_1y_2=-4;$$

слѣдовательно, y_1 и y_2 суть корни уравненія

$$y^2+y-4=0. \tag{2}$$

Положимъ теперь

$$u_1=2\cos a+2\cos 4a,$$
$$u_2=2\cos 3a+2\cos 5a,$$
$$u_3=2\cos 8a+2\cos 2a,$$
$$u_4=2\cos 7a+2\cos 6a;$$

находимъ сначала

$$u_1+u_3=y_1,$$
$$u_2+u_4=y_2;$$

затѣмъ, умножая u_1 на u_3, u_2 на u_4 и преобразовывая произведенія косинусовъ въ суммы, найдемъ

$$u_1u_3=u_2u_4=2\cos a+2\cos 8a+2\cos 4a+2\cos 2a$$
$$+2\cos 3a+2\cos 7a+2\cos 5a+2\cos 6a,$$

и, слѣдовательно,

$$u_1u_3=-1,$$
$$u_2u_4=-1.$$

Отсюда слѣдуетъ, что числа u_1 и u_3, u_2 и u_4 суть соотвѣтственно корни уравненій

$$(3)\qquad \begin{cases} u^2-y_1u-1=0, \\ u^2-y_2u-1=0. \end{cases}$$

Положимъ, наконецъ,

$$x_1=2\cos a, \quad x_5=2\cos 4a,$$
$$x_2=2\cos 3a, \quad x_6=2\cos 5a,$$
$$x_3=2\cos 8a, \quad x_7=2\cos 2a,$$
$$x_4=2\cos 7a, \quad x_8=2\cos 6a;$$

имѣемъ сначала

$$x_1+x_5=u_1,$$
$$x_2+x_6=u_2,$$
$$x_3+x_7=u_3,$$
$$x_4+x_8=u_4,$$

и если преобразуемъ произведенія x_1x_5, x_2x_6, x_3x_7, x_4x_8 въ суммы косинусовъ, то найдемъ

$$x_1x_5=u_2,$$
$$x_2x_6=u_3,$$
$$x_3x_7=u_4,$$
$$x_4x_8=u_1;$$

слѣдовательно, числа x_1 и x_5, x_2 и x_6, x_3 и x_7, x_4 и x_8 будутъ соотвѣтственно корни уравненій

$$(4)\qquad \begin{cases} x^2-u_1x+u_2=0, \\ x^2-u_2x+u_3=0, \\ x^2-u_3x+u_4=0, \\ x^2-u_4x+u_1=0. \end{cases}$$

Два какія угодно изъ чиселъ u_1, u_2, u_3, u_4 могутъ выражаться раціонально одно при помощи другого; въ самомъ дѣлѣ, мы нашли два соотношенія

$$u_1u_3=-1, \quad u_2u_4=-1,$$

и если мы составимъ произведенія u_2u_3, u_1u_4, то преобразовавъ въ сумму произведенія косинусовъ, найдемъ

$$u_2u_3=u_2-u_3-1, \quad u_1u_4=u_4-u_1-1;$$

изъ этихъ формулъ и предыдущихъ получимъ

$$u_2=\frac{u_1-1}{u_1+1}, \quad u_3=\frac{u_2-1}{u_2+1}, \quad u_4=\frac{u_3-1}{u_3+1}, \quad u_1=\frac{u_4-1}{u_4+1},$$

что даетъ намъ возможность написать уравненія (4) слѣдующимъ образомъ

$$(5)\qquad \begin{cases} x^2-u_1x+\dfrac{u_1-1}{u_1+1}=0, \\ x^2-u_2x+\dfrac{u_2-1}{u_2+1}=0, \\ x^2-u_3x+\dfrac{u_3-1}{u_3+1}=0, \\ x^2-u_4x+\dfrac{u_4-1}{u_4+1}=0. \end{cases}$$

Уравненія (3) выводятся одно изъ другого при помощи перестановки чиселъ y_1 и y_2; точно также уравненія (5) отличаются другъ отъ друга только значеніями корней u, которыя въ нихъ входятъ; отсюда слѣдуетъ, что рѣшеніе уравненія (1) приводится къ рѣшенію трехъ уравненій второй степени

$$(6)\qquad \begin{cases} y^2+y-4=0, \\ u^2-yu-1=0, \\ x^2-ux+\dfrac{u-1}{u+1}=0; \end{cases}$$

и, дѣйствительно, мы получимъ уравненіе (1), исключая y и u изъ уравненій (6), въ чемъ легко убѣдиться. Такъ какъ задача дѣленія окружностей на семнадцать равныхъ частей зависитъ только отъ уравненій второй степени, то это дѣленіе можетъ быть выполнено при помощи линейки и циркуля. Мы не можемъ указать здѣсь тѣхъ основаній, которыми мы руководились въ предыдущемъ анализѣ, и ограничимся лишь замѣчаніемъ, что эти основанія приводятъ къ слѣдующему замѣчательному выводу: *окружность можетъ быть*

*

раздѣлена на n равныхъ частей при помощи линейки и циркуля во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда n число первоначальное и n—1 есть степень 2. Наименьшія числа, которыя удовлетворяютъ этому двойному условію будутъ 3, 5, 17, 257, 65537. (*Смотри* мой *Cours d'Algèbre supérieure*, изд. 4, т. II).

Рѣшеніе двучленныхъ уравненій общаго вида.

175. Постараемся теперь рѣшить двучленное уравненіе общаго вида

$$z^m = A + Bi,$$

гдѣ A и B данныя числа положительныя, отрицательныя, нули. Если обозначимъ чрезъ ρ и a модуль и аргументъ выраженія $A+Bi$, то уравненіе приметъ видъ

$$z^m = \rho(\cos a + i \sin a). \tag{1}$$

Положивъ

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{2}$$

будетъ имѣть

$$z^m = r^m(\cos m\varphi + i \sin m\varphi).$$

Два равенства

$$r^m = \rho, \quad m\varphi = 2k\pi + a,$$

необходимы и достаточны (n° 160) для того, чтобы значеніе (2) удовлетворяло уравненію (1); отсюда

$$r = \sqrt[m]{\rho}, \quad \varphi = \frac{2k\pi + a}{m}.$$

Слѣдовательно, корни предложеннаго уравненія даются формулой

$$z = \sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi+a}{m} + i\sin\frac{2k\pi+a}{m}\right), \tag{3}$$

гдѣ k цѣлое число.

Для того, чтобы два значенія k соотвѣтствовали двумъ равнымъ значеніемъ z, необходимо и достаточно, чтобы ихъ разность была кратнымъ числа m; уравненіе (3) имѣетъ, какъ это и должно быть, m различныхъ корней, которые мы получимъ, давая k какихъ угодно m послѣдовательныхъ значеній между $-\infty$ и $+\infty$, напримѣръ.

$$0,\ 1,\ 2,\ldots,\ m-1.$$

Формула (3) можетъ быть написана такъ:

$$z = \sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{a}{m} + i\sin\frac{a}{m}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}\right).$$

$\sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{a}{m} + i\sin\frac{a}{m}\right)$ есть одинъ изъ корней уравненія (1), $\cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}$ есть выраженіе m-ыхъ корней единицы, откуда слѣдуетъ, что мы получимъ m корней уравненія (1), умножая одинъ изъ нихъ на m m-ыхъ корней единицы. Согласно n° 167, можно еще представить корни уравненія (1) при помощи формулы

$$z = \sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{a}{m} + i\sin\frac{a}{m}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{m} \pm i\sin\frac{2k\pi}{m}\right), \tag{4}$$

гдѣ достаточно дать k значенія $0,\ 1,\ 2,\ldots,\ \frac{m}{2}$, если m число четное, и значенія $0,\ 1,\ 2,\ldots,\ \frac{m-1}{2}$, если m число нечетное.

Въ частномъ случаѣ, когда B равно нулю, имѣемъ $\rho = A$ или $\rho = -A$, смотря потому, будетъ ли A положительное или отрицательное число; можно принять $a=0$ въ первомъ случаѣ и $a=\pi$ во второмъ случаѣ. Поэтому корни уравненія

$$z^m = +A$$

будутъ даны или формулой

$$z = \sqrt[m]{A}\left(\cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}\right), \tag{5}$$

въ которой должно k дать m значеній $0,\ 1,\ 2,\ldots,\ m-1$, или формулой

$$z = \sqrt[m]{A}\left(\cos\frac{2k\pi}{m} \pm i\sin\frac{2k\pi}{m}\right), \tag{6}$$

гдѣ достаточно k дать значенія $0,\ 1,\ 2,\ldots,\ \frac{m}{2}$, если m число четное, и значенія $0,\ 1,\ 2,\ldots,\ \frac{m-1}{2}$, если m число нечетное.

Корни уравненія

$$z^m = -A$$

даются или формулой

$$(7)\qquad z=\sqrt[m]{A}\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{m}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{m}\right],$$

въ которой должно дать k значенія 0, 1, 2,..., $m-1$, или формулой

$$z=\sqrt[m]{A}\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{m}\pm i\sin\frac{(2k+1)\pi}{m}\right],$$

въ которой достаточно дать k значенія 0, 1, 2,..., $\frac{m}{2}-1$, если m число четное, и значенія 0, 1, 2,..., $\frac{m-1}{2}$, если m число нечетное.

Рѣшеніе трехчленныхъ уравненій.

176. Пусть дано трехчленное уравненіе

$$(1)\qquad z^{2m}+pz^m+q=0,$$

гдѣ p и q обозначаютъ данныя числа; изъ него получаемъ

$$(2)\qquad z^m=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

и приходимъ къ рѣшенію двухъ двучленныхъ уравненій.

Разсмотримъ въ частности тотъ случай, когда p и q числа вещественныя и

$$\frac{p^2}{4}-q<0;$$

пусть

$$-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=\rho(\cos a+i\sin a);$$

уравненіе (1) приметъ видъ

$$z^{2m}-2\rho z^m\cos a+\rho^2=0,$$

а уравненіе (2)

$$z^m=\rho(\cos a\pm i\sin a).$$

Корни уравненія $z^m=\rho(\cos a+i\sin a)$ заключаются въ формулѣ

$$z=\sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi+a}{m}+i\sin\frac{2k\pi+a}{m}\right);$$

но эти корни сопряженны съ корнями уравненія $z^m=\rho(\cos a-\sin a)$,

слѣдовательно, всѣ $2m$ корней разсматриваемаго уравненія заключаются въ формулѣ

$$z=\sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi+a}{m}\pm i\sin\frac{2k\pi+a}{m}\right),$$

гдѣ достаточно для k взять m цѣлыхъ послѣдовательныхъ чиселъ.

Формула Моавра для всякаго показателя.

177. Равенство

$$\cos a+i\sin a=\left(\cos\frac{a}{n}+i\sin\frac{a}{n}\right)^n$$

показываетъ, что $\cos\frac{a}{n}+i\sin\frac{a}{n}$ есть n-ый корень изъ $\cos a+i\sin a$; точно также $\cos\frac{ma}{n}+i\sin\frac{ma}{n}$ есть n-ый корень изъ $\cos ma+i\sin ma$ или изъ $(\cos a+i\sin a)^m$, слѣдовательно, можно написать

$$\sqrt[n]{(\cos a+i\sin a)^m}=\cos\frac{m}{n}a+i\sin\frac{m}{n}a,$$

или

$$(\cos a+i\sin a)^{\frac{m}{n}}=\cos\frac{m}{n}a+i\sin\frac{m}{n}a.$$

Это формула Моавра, распространенная на случай, когда показатель дробный $\frac{m}{n}$; но слѣдуетъ замѣтить, что правая ея часть представляетъ только одно изъ n значеній, которыя можетъ принять лѣвая часть. Впрочемъ, мы получимъ всѣ эти значенія (n° 175), умножая правую часть предыдущей формулы на $\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$.

Формула Моавра справедлива также и для какого угодно отрицательнаго показателя $-m$; въ самомъ дѣлѣ, уравненіе

$$(\cos a+i\sin a)^m=\cos ma+i\sin ma$$

даетъ

$$\frac{1}{(\cos a+i\sin a)^m}=\frac{1}{\cos ma+i\sin ma}=\cos ma-i\sin ma,$$

или

$$(\cos a+i\sin a)^{-m}=\cos(-ma)+i\sin(-ma).$$

Формула Моавра показываетъ, что можно рѣшить алгебраически

уравненія, къ которымъ приводитъ задача дѣленія дугъ. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ

$$\cos\frac{a+2k\pi}{m}+i\sin\frac{a+2k\pi}{m}=\sqrt[m]{\cos a+i\sin a};$$

эта формула выражаетъ, что m значеній правой части соотвѣтственно равны m значеніямъ, которыя принимаетъ лѣвая часть, когда даютъ k значенія 0, 1, 2,.... (m—1). Замѣняя i чрезъ —i, будемъ имѣть

$$\cos\frac{a+2k\pi}{m}-i\sin\frac{a+2k\pi}{m}=\sqrt[m]{\cos a-i\sin a}$$

и, слѣдовательно,

$$\cos\frac{a+2k\pi}{m}=\frac{\sqrt[m]{\cos a+i\sin a}+\sqrt[m]{\cos a-i\sin a}}{2},$$

$$\sin\frac{a+2k\pi}{m}=\frac{\sqrt[m]{\cos a+i\sin a}-\sqrt[m]{\cos a-i\sin a}}{2i}.$$

Эти формулы даютъ алгебраическое выраженіе для корней уравненій, отъ которыхъ зависятъ $\cos\frac{a}{m}$ и $\sin\frac{a}{m}$, когда данъ $\cos a$ или $\sin a$.

Теоремы Моавра и Котеса.

178. Теоремы Моавра и Котеса даютъ возможность представить геометрически вещественные дѣлители трехчлена $z^{2m}\pm 2z^m\cos a+1$, гдѣ a обозначаетъ данный уголъ, и двучлена $z^m\pm 1$.

Два линейныхъ сомножителя, которые соотвѣтствуютъ двумъ сопряженнымъ корнямъ уравненія

$$z^{2m}-2z^m\cos a+1=0,$$

выражаются чрезъ

$$z-\left(\cos\frac{2k\pi+a}{m}+i\sin\frac{2k\pi+a}{m}\right)$$

и

$$z-\left(\cos\frac{2k\pi+a}{m}-i\sin\frac{2k\pi+a}{m}\right);$$

произведеніе y_k^2 этихъ сомножителей будетъ

$$y_k^2=z^2-2z\cos\frac{2k\pi+a}{m}+1;$$

такимъ образомъ имѣемъ тождество:

(1) $$z^{2m}-2z^m\cos a+1=(y_0y_1y_2\ldots y_{m-1})^2.$$

Замѣнивъ a чрезъ $\pi+a$ и положивъ

$$y'^2_k=z^2-2z\cos\frac{(2k+1)\pi+a}{m}+1,$$

будетъ имѣть

(2) $$z^{2m}+2z^m\cos a+1=(y'_0y'_1\ldots y'_{m-1})^2.$$

Послѣ этого, разсмотримъ окружность, радіусъ которой равенъ 1; раздѣлимъ ее на $2m$ равныхъ частей въ точкахъ A_0, A_1, A_2,..., A_{2m-1}; соединимъ центръ O со всѣми этими точками и проведемъ прямую OP, образующую съ первымъ радіусомъ OA_0 уголъ, равный $\frac{a}{m}$; наконецъ, на этой линіи возьмемъ какую нибудь длину $OP=z$ и соединимъ точку P со всѣми точками дѣленія. Треугольники OPA_{2m-2k} и $OPA_{2m-2k-1}$ даютъ

$$PA^2_{2m-2k}=z^2-2z\cos\frac{2k\pi+a}{m}+1,$$

$$PA^2_{2m-2k-1}=z^2-2z\cos\frac{(2k+1)\pi+a}{m}+1,$$

и, слѣдовательно,

$$PA_{2m-2k}=y_k,\quad PA_{2m-2k-1}=y'_k.$$

Отсюда слѣдуетъ, что трехчленъ $z^{2m}-2z^m\cos a+1$ равенъ квадрату произведенія разстояній точки P отъ точекъ A_0, A_2, A_4,..., и что трехчленъ $z^{2m}+2z^m\cos a+1$ равенъ квадрату произведенія разстояній той же точки P отъ точекъ A_1, A_3, A_5,...; въ этихъ равенствахъ и состоитъ теорема Моавра.

Если уголъ a равенъ нулю, то точка P расположена на радіусѣ OA_0 и уравненія (1) и (2) даютъ, послѣ извлеченія квадратнаго корня изъ обѣихъ частей,

$$z^m-1=\pm y_0y_1\ldots y_{m-1},$$
$$z^m+1=y'_0y'_1\ldots y'_{m-1}.$$

Эти два равенства составляютъ теорему Котеса; должно брать знакъ + или знакъ — во второй части первой формулы, смотря потому, будетъ ли точка P находится внѣ или внутри круга.

Выраженія степеней синуса и косинуса дуги въ линейныхъ функціяхъ синусовъ и косинусовъ дугъ, кратныхъ данной дуги.

179. Пусть

$$\cos a+i\sin a=u,\quad \cos a-i\sin a=v,$$

тогда будемъ имѣть

$$2\cos a=u+v,\quad 2i\sin a=u-v,$$

и, слѣдовательно,

$$2^n\cos^n a=(u+v)^n,\quad (2i)^n\sin^n a=(u-v)^n,$$

или разлагая

$$(1)\qquad 2^n\cos^n a=u^n+\frac{n}{1}u^{n-1}v+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}u^{n-2}v^2+\ldots$$

$$(2)\qquad (2i)^n\sin^n a=u^n-\frac{n}{1}u^{n-1}v+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}u^{n-2}v^2-\ldots$$

Разсмотримъ прежде всего уравненіе (1). Если n число четное, то правая часть заключаетъ нечетное число членовъ и, группируя вмѣстѣ члены одинаково удаленные отъ крайнихъ, получимъ

$$2^n\cos^n a=(u^n+v^n)+\frac{n}{1}uv(u^{n-2}+v^{n-2})+\ldots$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+2\right)}{1\,.\,2\ldots\left(\frac{n}{2}-1\right)}u^{\frac{n}{2}-1}v^{\frac{n}{2}-1}(u^2+v^2)$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1\,.\,2\ldots\frac{n}{2}}u^{\frac{n}{2}}v^{\frac{n}{2}}.$$

Если n число нечетное, то правая часть уравненія (1) имѣетъ четное число членовъ, и если мы сгруппируемъ, какъ выше, члены, равно удаленные отъ крайнихъ, то получимъ

$$2^n\cos^n a=(u^n+v^n)+\frac{n}{1}uv(u^{n-2}+v^{n-2})$$
$$+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}u^2v^2(u^{n-4}+v^{n-4})+\ldots$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\,.\,2\ldots\left(\frac{n-1}{2}\right)}u^{\frac{n-1}{2}}v^{\frac{n-1}{2}}(u+v).$$

Кромѣ того $uv=1$ и $u^m+v^m=2\cos ma$; слѣдовательно, будемъ имѣть, если n число четное,

$$(3)\qquad \begin{cases} 2^{n-1}\cos^n a=\cos na+\frac{n}{1}\cos(n-2)a+\ldots \\ \qquad +\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+2\right)}{1.2\ldots\left(\frac{n}{2}-1\right)}\cos 2a \\ \qquad +\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{2}, \end{cases}$$

и, если n число нечетное,

$$(4)\qquad \begin{cases} 2^{n-1}\cos^n a=\cos na+\frac{n}{1}\cos(n-2)a \\ \qquad +\frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)a+\ldots \\ \qquad +\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1.2\ldots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cos a. \end{cases}$$

Займемся теперь уравненіемъ (2). Если n число четное, то правая часть заключаетъ въ себѣ нечетное число членовъ; члены, равно удаленные отъ крайнихъ, имѣютъ тотъ же знакъ и, группируя ихъ вмѣстѣ, получимъ

$$2^n(-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n a$$
$$=(u^n+v^n)-\frac{n}{1}uv(u^{n-2}+v^{n-2})+\frac{n(n-1)}{1.2}u^2v^2(u^{n-4}+v^{n-4})-\ldots$$
$$\pm\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+2\right)}{1.2\ldots\left(\frac{n}{2}-1\right)}u^{\frac{n}{2}-1}v^{\frac{n}{2}-1}(u^2+v^2)$$
$$\mp\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{n}{2}}u^{\frac{n}{2}}v^{\frac{n}{2}},$$

или

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} 2^{n-1}(-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n a \\ \quad =\cos na-\frac{n}{1}\cos(n-2)a+\frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)a-\dots \\ \pm\frac{n(n-1)\dots\left(\frac{n}{2}+2\right)}{1.2\dots\left(\frac{n}{2}-1\right)}\cos 2a\mp\frac{n(n-1)\dots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\dots\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Если n число нечетное, то правая часть уравненія (2) заключаетъ четное число членовъ, и члены, равно удаленные отъ крайнихъ, имѣютъ знаки обратные; группируя ихъ вмѣстѣ, получимъ

$$\begin{array}{l} 2^n(-1)^{\frac{n-1}{2}}i\sin^n a \\ \quad =(u^n-v^n)-\frac{n}{1}uv(u^{n-2}-v^{n-2})+\frac{n(n-1)}{1.2}u^2v^2(u^{n-4}-v^{n-4})-\dots \\ \quad \pm\frac{n(n-1)\dots\left(\frac{n+3}{n}\right)}{1.2\dots\left(\frac{n-1}{2}\right)}u^{\frac{n-1}{2}}v^{\frac{n-1}{2}}(u-v); \end{array}$$

кромѣ того $u^m-v^m=2i\sin ma$, слѣдовательно,

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} 2^{n-1}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin^n a \\ \quad =\sin na-\frac{n}{1}\sin(n-2)a+\frac{n(n-1)}{1.2}\sin(n-4)a-\dots \\ \quad \pm\frac{n(n-1)\dots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1.2\dots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin a. \end{array}\right.$$

Мы видимъ, что $\cos^n a$ выражается во всѣхъ случаяхъ при помощи линейной функціи косинусовъ дугъ кратныхъ a и что $\sin^n a$ выражается подобнымъ образомъ въ функціи косинусовъ или въ функціи синусовъ дугъ кратныхъ a, смотря потому, будетъ ли n четное или нечетное число.

Выраженія для $\sin ma$ и $\cos ma$ въ функціяхъ $\sin a$ или $\cos a$.

180. Мы здѣсь постараемся преобразовать $\sin ma$ и $\cos ma$ въ многочленъ, расположенный по цѣлымъ степенямъ $\sin a$ или $\cos a$, или

по крайней мѣрѣ въ произведеніе, полученное отъ умноженія подобнаго многочлена на $\cos a$ или $\sin a$.

Простымъ способомъ, которымъ воспользуемся, мы обязаны Коши; онъ основывается на равенствѣ

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{(x+y)(x+y-1)\dots(x+y-n+1)}{1.2.3\dots n} \\ \quad =\frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{1.2.3\dots n}+\frac{x(x-1)\dots(x-n+2)}{1.2.3\dots(n-1)}\cdot\frac{y}{1} \\ \quad +\frac{x(x-1)\dots(x-n+3)}{1.2.3\dots(n-2)}\cdot\frac{y(y-1)}{1.2}+\dots \\ \quad +\frac{x}{1}\cdot\frac{y(y-1)\dots(y-n+2)}{1.2\dots(n-1)}+\frac{y(y-1)\dots(y-n+1)}{1.2\dots n}, \end{array}\right.$$

справедливомъ, каковы бы ни были числа x и y и положительное цѣлое число n. Чтобы вывести это равенство для случаевъ, когда x и y цѣлыя положительныя числа, равныя или превышающія n, можемъ начать съ тожества

$$(1+z)^{x+y}=(1+z)^x(1+z)^y,$$

или

$$1+\frac{x+y}{1}z+\dots=\left(1+\frac{x}{1}z+\dots\right)\left(1+\frac{y}{1}z+\dots\right).$$

Если, выполнивъ умноженіе, расположимъ правую часть этого тожества по степенямъ z, то, приравнявъ коэффиціентъ при z^n въ лѣвой части его коэффиціенту при z^n въ правой части, мы получимъ равенство, которое требуется доказать. Такъ какъ это равенство выведено для всѣхъ цѣлыхъ значеній x и y, большихъ n, то оно непремѣнно будетъ существовать для всякихъ значеній x и y. Въ самомъ дѣлѣ, обозначимъ, для краткости, чрезъ $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ обѣ части равенства, о которомъ рѣчь, и чрезъ x_0 цѣлое значеніе x, большее n; многочлены $\varphi(x_0, y)$ и $\psi(x_0, y)$, которые содержатъ только перемѣнную y, равны между собою для всѣхъ цѣлыхъ значеній y, большихъ n. Слѣдовательно, мы непремѣнно будемъ имѣть

$$\varphi(x_0, y)=\psi(x_0, y),$$

для всякаго y; другими словами, многочлены $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ равны, при всякомъ y, для всѣхъ цѣлыхъ значеній x, большихъ n, и очевидно отсюда заключаемъ, что равенство

$$\varphi(x,y)=\psi(x,y)$$

справедливо для всѣхъ значеній x и y.

Замѣняя въ формулѣ (1) x чрезъ $\frac{x}{2}$ и y чрезъ $\frac{y}{2}$, получимъ

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{(x+y)(x+y-2)\ldots(x+y-2n+2)}{2.4.6\ldots(2n)} \\ \quad =\frac{x(x-2)\ldots(x-2n+2)}{2.4.6\ldots(2n)}+\frac{x(x-2)\ldots(x-2n+4)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\cdot\frac{y}{2}+\ldots \\ \quad +\frac{x}{2}\cdot\frac{y(y-2)\ldots(y-2n+4)}{2.4.6\ldots(2n-2)}+\frac{y(y-2)\ldots(y-2n+2)}{2.4.6\ldots(2n)}. \end{array}\right.$$

181. Если въ уравненіяхъ (1) n° 163 замѣнимъ четныя степени $\cos a$ чрезъ цѣлыя степени $1-\sin^2 a$, то будемъ имѣть для четныхъ значеній m

$$\cos ma=(1-\sin^2 a)^{\frac{m}{2}}-\frac{m(m-1)}{1.2}(1-\sin^2 a)^{\frac{m-2}{2}}\sin^2 a$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}(1-\sin^2 a)^{\frac{m-4}{2}}\sin^4 a-\ldots,$$

$$\sin ma=\cos a\left[\frac{m}{1}(1-\sin^2 a)^{\frac{m-2}{2}}\sin a\right.$$
$$\left.-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(1-\sin^2 a)^{\frac{m-4}{2}}\sin^3 a+\ldots\right],$$

и для нечетныхъ значеній m

$$\cos ma=\cos a\left[(1-\sin^2 a)^{\frac{m-1}{2}}-\frac{m(m-1)}{1.2}(1-\sin^2 a)^{\frac{m-3}{2}}\sin^2 a\right.$$
$$\left.+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}(1-\sin^2 a)^{\frac{m-5}{2}}\sin^4 a-\ldots\right].$$

$$\sin ma=\frac{m}{1}(1-\sin^2 a)^{\frac{m-1}{2}}\sin a$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(1-\sin^2 a)^{\frac{m-3}{2}}\sin^3 a+\ldots.$$

Если разложимъ многочлены, находящіеся въ правыхъ частяхъ этихъ формулъ по возрастающимъ степенямъ $\sin a$, то найдемъ для четныхъ значеній m

$$\cos ma=1-\frac{m}{1}\left(\frac{m-1}{2}+\frac{1}{2}\right)\sin^2 a$$
$$+\frac{m(m-2)}{1.3}\left[\frac{(m-1)(m-3)}{2.4}+\frac{m-1}{2}\cdot\frac{3}{2}+\frac{3.1}{2.4}\right]\sin^4 a-\ldots$$

$$\sin ma=\cos a\left\{\frac{m}{1}\sin a-\frac{m(m-2)}{1.3}\left(\frac{m-1}{2}+\frac{3}{2}\right)\sin^3 a\right.$$
$$\left.+\frac{m(m-2)(m-4)}{1.3.5}\left[\frac{(m-1)(m-3)}{2.4}+\frac{m-1}{2}\cdot\frac{5}{2}+\frac{5.3}{2.4}\right]\sin^5 a-\ldots\right\}$$

и для всѣхъ нечетныхъ значеній m

$$\cos ma=\cos a\left\{1-\frac{m-1}{2}\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)\sin^2 a\right.$$
$$\left.+\frac{(m-1)(m-3)}{1.3}\left[\frac{m(m-2)}{2.4}+\frac{m}{2}\cdot\frac{3}{2}+\frac{3.1}{2.4}\right]\sin^4 a-\ldots\right\},$$

$$\sin ma=\frac{m}{1}\sin a-\frac{m(m-1)}{1.3}\left(\frac{m-2}{2}+\frac{3}{2}\right)\sin^3 a$$
$$+\frac{m(m-1)(m-3)}{1.3.5}\left[\frac{(m-2)(m-4)}{2.4}\right.$$
$$\left.+\frac{m-2}{2}\cdot\frac{5}{2}+\frac{5.3}{2.4}\right]\sin^5 a-\ldots$$

Воспользовавшись затѣмъ формулою (2) n° 180, получимъ для всѣхъ четныхъ значеній m

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos ma=1-\frac{m.m}{1.2}\sin^2 a+\frac{(m+2)m.m(m-2)}{1.2.3.4}\sin^4 a \\ \quad -\frac{(m+4)(m+2)m.m(m-2)(m-4)}{1.2.3.4.5.6}\sin^6 a+\ldots, \\ \sin ma=\cos a\left[\frac{m}{1}\sin a-\frac{(m+2)m(m-2)}{1.2.3}\sin^3 a\right. \\ \quad \left.+\frac{(m+4)(m+2)m(m-2)(m-4)}{1.2.3.4.5}\sin^5 a-\ldots\right], \end{array}\right.$$

и для всѣхъ нечетныхъ значеній m

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos ma=\cos a\left[1-\frac{(m+1)(m-1)}{1.2}\sin^2 a\right. \\ \quad \left.+\frac{(m+3)(m+1)(m-1)(m-3)}{1.2.3.4}\sin^4 a-\ldots\right], \\ \sin ma=\frac{m}{1}\sin a-\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}\sin^3 a \\ \quad +\frac{(m+3)(m+1)m(m-1)(m-3)}{1.2.3.4.5}\sin^5 a-\ldots. \end{array}\right.$$

Если въ формулахъ (1) и (2) замѣнимъ a чрезъ $\frac{\pi}{2}-a$, то получимъ для четныхъ значеній m

$$(3)\quad \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}}\cos ma \\ \quad =1-\dfrac{m.m}{2}\cos^2 a+\dfrac{(m+2)m.m(m-2)}{1.2.3.4}\cos^4 a \\ \qquad -\dfrac{(m+4)(m+2)m.m(m-2)(m-4)}{1.2.3.4.5.6}\cos^6 a+\ldots, \\ (-1)^{\frac{m}{2}+1}\sin ma \\ \quad =\sin a\left[\dfrac{m}{1}\cos a-\dfrac{(m+2)m(m-2)}{1.2.3}\cos^3 a\right. \\ \qquad \left.+\dfrac{(m+4)(m+2)m(m-2)(m-4)}{1.2.3.4.5}\cos^5 a-\ldots\right], \end{cases}$$

и для нечетныхъ значеній m

$$(4)\quad \begin{cases} (-1)^{\frac{m-1}{2}}\sin ma \\ \quad =\sin a\left[1-\dfrac{(m+1)(m-1)}{1.2}\cos^2 a\right. \\ \qquad \left.+\dfrac{(m+3)(m+1)(m-1)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^4 a-\ldots\right], \\ (-1)^{\frac{m-1}{2}}\cos ma \\ \quad =\dfrac{m}{1}\cos a-\dfrac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}\cos^3 a \\ \qquad +\dfrac{(m+3)(m+1)m(m-1)(m-3)}{1.2.3.4.5}\cos^5 a-\ldots. \end{cases}$$

Такимъ образомъ, въ слѣдующихъ частныхъ случаяхъ будемъ имѣть

$$\cos 2a=1-2\sin^2 a,$$
$$\cos 4a=1-8\sin^2 a+8\sin^4 a,$$
$$\cos 6a=1-18\sin^2 a+48\sin^4 a-32\sin^6 a,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a,$$
$$\sin 5a=5\sin a-20\sin^3 a+16\sin^5 a,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-\cos 2a=1-2\cos^2 a,$$
$$-\cos 3a=3\cos a-4\cos^3 a,$$

$$\cos 4a=1-8\cos^2 a+8\cos^4 a,$$
$$\cos 5a=5\cos a-20\cos^3 a+16\cos^5 a,$$
$$-\cos 6a=1-18\cos^2 a+48\cos^4 a-32\cos^6 a,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

182. Въ предыдушихъ формулахъ мы имѣемъ расположеніе по восходящимъ степенямъ $\cos a$ или $\sin a$; можно получить расположеніе по нисходящимъ степенямъ тѣхъ же количествъ и тотъ видъ, который примутъ наши формулы, будетъ одинъ и тотъ же для обоихъ случаевъ m четнаго и нечетнаго.

Положимъ, для краткости

$$\cos ma=\Sigma u_n\cos^{m-2n}a,\quad \frac{\sin ma}{\sin a}=\Sigma v_n\cos^{m-2n-1}a,$$

гдѣ знакъ Σ обозначаетъ сумму значеній, принимаемыхъ тѣмъ выраженіемъ, около котораго поставленъ этотъ знакъ, когда будемъ давать n всѣ цѣлыя значенія, начиная отъ нуля и кончая самымъ большимъ изъ тѣхъ, при которыхъ показатель $\cos a$ будетъ число положительное или нуль; уравненія (3) и (4) даютъ

$$u_n=(-1)^n m\,\frac{(m-n-1)(m-n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots(m-2n)}\,2^{m-2n-1},$$
$$v_n=(-1)^n\frac{(m-n-1)(m-n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots(m-2n-1)}\,2^{m-2n-1}.$$

Но эти формулы предполагаютъ $n<\frac{m-1}{2}$; для $n=\frac{m}{2}$, въ случаѣ, когда m число четное, значеніе u_n должно приводиться къ $(-1)^{\frac{m}{2}}$ на основаніи перваго изъ уравненій (3); въ случаѣ, когда m нечетное число, значенія u_n и v_n приводятся соотвѣтственно, на основаніи уравненій (4), къ $(-1)^{\frac{m-1}{2}}m$ и къ $(-1)^{\frac{m-1}{2}}$ для $n=\frac{m-1}{2}$. Если предыдущія выраженія u_n и v_n умножимъ и раздѣлимъ на произведеніе $1.2\ldots n$, то получимъ

$$u_n=(-1)^n\,\frac{m.2^{m-2n-1}}{1.2\ldots n}\,\frac{1.2\ldots(m-n-1)}{1.2\ldots(m-2n)},$$
$$v_n=(-1)^n\,\frac{2^{m-2n-1}}{1.2\ldots n}\,\frac{1.2\ldots(m-n-1)}{1.2\ldots(m-2n-1)},$$

или

$$u_n=(-1)^n\,\frac{m(m-n-1)(m-n-2)\ldots(m-2n+1)}{1.2\ldots n}\,2^{m-2n-1},$$
$$v_n=(-1)^n\,\frac{(m-n-1)(m-n-2)\ldots(m-2n)}{1.2\ldots n}\,2^{m-2n-1},$$

при условіи, что, въ случаѣ $n=1$, произведеніе $(m-n-1)(m-n-2)\ldots(m-2n+1)$ въ значеніи u_n приводится къ единицѣ. Если примемъ эту новую форму, то нѣтъ надобности въ ограниченіи $n<\frac{m-1}{2}$; въ самомъ дѣлѣ, правыя части предыдущихъ формулъ приводятся соотвѣтственно къ $(-1)^{\frac{m-1}{2}}m$ и $(-1)^{\frac{m-1}{2}}$ для $n=\frac{m-1}{2}$, въ случаѣ, если m нечетное число; равнымъ образомъ значеніе u_n приводится къ $(-1)^{\frac{m}{2}}$ для $n=\frac{m}{2}$, въ случаѣ, когда m четное число. Для $n=0$ наши формулы не опредѣляютъ u_n и v_n; но если примемъ во вниманіе первыя выраженія u_n и v_n, то оба эти числа должны приводиться къ 2^{m-1}. Поэтому будемъ имѣть

$$\cos ma=\Sigma(-1)^n\frac{m(m-n-1)(m-n-2)\ldots(m-2n+1)}{1.2.3\ldots n}2^{m-2n-1}\cos^{m-2n}a,$$

$$\frac{\sin ma}{\sin a}=\Sigma(-1)^n\frac{(m-n-1)(m-n-2)\ldots(m-2n)}{1.2.3\ldots n}2^{m-2n-1}\cos^{m-2n-1}a,$$

или

$$(5)\quad\begin{cases}\cos ma=2^{m-1}\cos^m a-\frac{m}{1}2^{m-3}\cos^{m-2}a\\ \quad+\frac{m(m-3)}{1.2}2^{m-5}\cos^{m-4}a\\ \quad-\frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}2^{m-7}\cos^{m-6}a\\ \quad+\frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{1.2.3.4}2^{m-9}\cos^{m-8}a-\ldots.\\ \frac{\sin ma}{\sin a}=2^{m-1}\cos^{m-1}a-\frac{m-2}{1}2^{m-3}\cos^{m-3}a\\ \quad+\frac{(m-3)(m-4)}{1.2}2^{m-5}\cos^{m-5}a\\ \quad-\frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3}2^{m-7}\cos^{m-7}a\\ \quad+\frac{(m-5)(m-6)(m-7)(m-8)}{1.2.3.4}2^{m-9}\cos^{m-9}a-\ldots,\end{cases}$$

и эти новыя формулы справедливы, повторяемъ, при всякомъ цѣломъ m четномъ или нечетномъ.

Если въ формулахъ (5) замѣнимъ a чрезъ $\frac{\pi}{2}-a$, то получимъ для четныхъ значеній m

$$(6)\quad\begin{cases}(-1)^{\frac{m}{2}}\cos ma\\ \quad=2^{m-1}\sin^m a-\frac{m}{1}2^{m-3}\sin^{m-2}a+\frac{m(m-3)}{1.2}2^{m-5}\sin^{m-4}a\\ \quad-\frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}2^{m-7}\sin^{m-6}a+\ldots,\\ (-1)^{\frac{m}{2}-1}\frac{\sin ma}{\cos a}\\ \quad=2^{m-1}\sin^{m-1}a-\frac{m-2}{1}2^{m-3}\sin^{m-3}a+\frac{(m-3)(m-4)}{1.2}2^{m-5}\sin^{m-5}a\\ \quad-\frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3}2^{m-7}\sin^{m-7}a+\ldots,\end{cases}$$

и для нечетныхъ значеній m

$$(7)\quad\begin{cases}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\sin ma\\ \quad=2^{m-1}\sin^m a-\frac{m}{1}2^{m-3}\sin^{m-2}a+\frac{m(m-3)}{1.2}2^{m-5}\sin^{m-4}a\\ \quad-\frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}2^{m-7}\sin^{m-6}a+\ldots,\\ (-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{\cos ma}{\cos a}\\ \quad=2^{m-1}\sin^{m-1}a-\frac{m-2}{1}2^{m-3}\sin^{m-3}a+\frac{(m-3)(m-4)}{1.2}2^{m-5}\sin^{m-5}a\\ \quad-\frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3}2^{m-7}\sin^{m-7}a+\ldots\end{cases}$$

Первая изъ формулъ (5) даетъ непосредственно выраженіе количества, которое мы обозначали чрезъ V_m въ n° 168; въ самомъ дѣлѣ, если положимъ $z=\cos a+i\sin a$, то будемъ имѣть

$$z+\frac{1}{z}=2\cos a,\quad z^m+\frac{1}{z^m}=2\cos ma,$$

и, замѣняя въ первой изъ формулъ (5) $2\cos a$ чрезъ x, найдемъ формулу

$$z^m+\frac{1}{z^m}=x^m-\frac{m}{1}x^{m-2}+\frac{m(m-3)}{1.2}x^{m-4}-\frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}x^{m-6}+\ldots,$$

*

которая обращается въ тождество. если въ ней замѣнимъ x чрезъ $z+\frac{1}{z}$.

Разложенія функцій sinx и cosx въ ряды по возростающимъ степенямъ x.

183. Формулы (1) n° 163 могутъ быть написаны такъ:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos ma}{\cos^m a} = 1 - \dfrac{m(m-1)}{1.2}\tang^2 a + \ldots \pm \dfrac{m\ldots(m-2n+1)}{1.2\ldots 2n}\tang^{2n} a \mp R_{2n}, \\ \dfrac{\sin ma}{\cos^m a} = \dfrac{m}{1}\tang a - \dfrac{m\ldots(m-2)}{1.2.3}\tang^2 a + \ldots \pm \dfrac{m\ldots(m-2n)}{1.2\ldots(2n+1)}\tang^{2n+1} a \mp R_{2n+1} \end{cases}$$

если положимъ

$$R_p = \frac{m\ldots(m-p-1)}{1.2\ldots(p+2)}\tang^{p+2} a - \frac{m\ldots(m-p-3)}{1.2\ldots(p+4)}\tang^{p+4} a + \ldots;$$

числа R_{2n} и R_{2n+1} опредѣляютъ погрѣшности, которыя мы сдѣлали, пренебрегая степенями $\tang a$, большими $(2n+1)$-ой степени, въ значеніяхъ $\frac{\cos ma}{\cos^m a}$ и $\frac{\sin ma}{\cos^m a}$; мы постараемся опредѣлить предѣлы этихъ погрѣшностей, полагая, что дуга a заключается между $-\frac{\pi}{4}$ и $+\frac{\pi}{4}$ и, слѣдовательно, $\tang^2 a < 1$. Сумма R_p состоитъ изъ опредѣленнаго числа членовъ, которые поочередно положительны и отрицательны, каковъ бы ни былъ знакъ при a, и ясно, что абсолютныя значенія этихъ членовъ будутъ постоянно уменьшаться, если

$$\frac{(m-p-2)(m-p-3)}{(p+3)(p+4)}\tang^2 a < 1;$$

слѣдовательно, значеніе R_p будетъ заключаться между нулемъ и значеніемъ перваго изъ членовъ, входящихъ въ это выраженіе, такъ что будемъ имѣть

$$R_p = \zeta\,\frac{m(m-1)\ldots(m-p-1)}{1.2\ldots(p+2)}\tang^{p+2} a,$$

гдѣ ζ обозначаетъ количество, заключающееся между нулемъ и единицею. И такъ, мы можемъ въ уравненіяхъ (1) замнить R_{2n} и R_{2n+1} чрезъ значенія, которыя принимаетъ предыдущее выраженіе R_p, когда въ немъ положимъ $p=2n$ и $p=2n+1$, лишь бы

только вышепоставленное неравенство удовлетворялось при $p=2n$, въ каковомъ случаѣ оно будетъ удовлетворяться и при $p=2n+1$. Послѣ этого, если положимъ

$$ma = x,$$

затѣмъ замѣнимъ въ лѣвыхъ частяхъ формулъ (1) a чрезъ $\frac{x}{m}$, а въ правыхъ частяхъ m чрезъ $\frac{x}{a}$, и, наконецъ, обозначимъ чрезъ Θ и λ числа, заключающіяся между нулемъ и 1, къ которымъ приводится ζ при $p=2n$ и $p=2n+1$, то будемъ имѣть

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos x}{\cos^m \frac{x}{m}} = 1 - \dfrac{x(x-a)}{1.2}\left(\dfrac{\tang a}{a}\right)^2 + \ldots \\ \qquad \pm \dfrac{x(x-a)\ldots(x-2na+a)}{1.2\ldots 2n}\left(\dfrac{\tang a}{a}\right)^{2n} \\ \qquad \mp \Theta\dfrac{x(x-a)\ldots(x-2na-a)}{1.2\ldots(2n+2)}\left(\dfrac{\tang a}{a}\right)^{2n+2}, \\ \dfrac{\sin x}{\cos^m \frac{x}{m}} = \dfrac{x}{1}\left(\dfrac{\tang a}{a}\right) - \dfrac{x(x-a)(x-2a)}{1.2.3}\left(\dfrac{\tang a}{1}\right)^3 + \ldots \\ \qquad \pm \dfrac{x(x-a)\ldots(x-2na)}{1.2\ldots(2n+1)}\left(\dfrac{\tang a}{a}\right)^{2n+1} \\ \qquad \mp \lambda\dfrac{x(x-a)\ldots(x-2na-2a)}{1.2\ldots(2n+3)}\left(\dfrac{\tang a}{a}\right)^{2n+3}; \end{cases}$$

и неравеиство, составляющее условіе, обратится въ

$$\frac{(x-2na-2a)(x-2na-3a)}{(2n+3)(2n+4)}\left(\frac{\tang a}{a}\right)^2 < 1.$$

Предполагая теперь, что n число достаточно большое, но постоянное, увеличиваемъ неопредѣленно цѣлое число m такъ, чтобы произведеніе $ma = x$ было постоянно; въ предѣлѣ получимъ не только $a=0$, $\frac{\tang a}{a}=1$, но еще $\cos^m \frac{x}{m}=1$. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ $1-\cos\frac{x}{m} < \frac{x^2}{2m^2}$ и, подавно,

$$\cos\frac{x}{m} - \cos^2\frac{x}{m} < \frac{x^2}{2m^2}, \ldots, \cos^{m-1}\frac{x}{m} - \cos^m\frac{x}{m} < \frac{x^2}{2m^2};$$

складывая всѣ эти неравенства, получимъ

$$1-\cos^m\frac{x}{m} < m\frac{x^2}{2m^2} \text{ или } < \frac{x^2}{2m}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что $\cos^m\frac{x}{m}$ заключается между 1 и $1-\frac{x^2}{2m}$ и, слѣдовательно, это число приводится къ единицѣ, когда m равно безконечности. Послѣ этого, уравненія (2) обращаются въ предѣлѣ въ слѣдующія

$$(3)\quad \begin{cases} \cos x = 1-\frac{x^2}{1.2}+\ldots\pm\frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n}\mp\Theta'\frac{x^{2n+2}}{1.2\ldots(2n+2)}, \\ \sin x = \frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\pm\frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)}\mp\lambda'\frac{x^{2n+3}}{1.2\ldots(2n+3)}, \end{cases}$$

и неравенство, составляющее условіе, приводится къ

$$(4)\quad \frac{x^2}{(2n+3)(2n+4)} < 1.$$

Уравненія (3), въ которыхъ Θ' и λ' обозначаютъ всегда дроби, заключающіяся между нулемъ и 1, справедливы при всѣхъ значеніяхъ n, удовлетворяющихъ условію (4). Въ частномъ случаѣ, когда x заключается между нулемъ и $\frac{\pi}{2}$, будемъ имѣть

$$\sin x > x-\frac{x^3}{6},\quad \cos x < 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}.$$

Предположимъ теперь, что цѣлое число n увеличивается безпредѣльно; дроби

$$\frac{x^{2n+2}}{1.2\ldots(2n+2)} = \frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdots\frac{x}{2n+2},$$

$$\frac{x^{2n+3}}{1.2\ldots(2n+3)} = \frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdots\frac{x}{2n+3}$$

будутъ имѣть предѣломъ нуль, такъ какъ онѣ представляютъ произведенія, въ которыхъ число множителей большихъ 1 ограниченное, тогда какъ число тѣхъ, которыя меньше 1 и даже меньше какой угодно дроби, можетъ быть больше всякаго даннаго числа; по этому можемъ написать

$$(5)\quad \begin{cases} \cos x = 1-\frac{x}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3\ldots 6}+\ldots, \\ \sin x = \frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2.3\ldots 7}+\ldots \end{cases}$$

Правыя части этихъ формулъ (5) будутъ безконечные ряды, которые, какъ мы видимъ, остаются *сходящимися*, для всѣхъ значеній x, заключающихся между $-\infty$ и $+\infty$; формулы (3) даютъ возможность узнать *остатки* этихъ рядовъ, т. е. погрѣшности, которыя совершаемъ, остановившись на какомъ нибудь членѣ.

184. Формулы (5) предоставляютъ самое простое средство для вычисленія синуса и косинуса данной дуги. Если положимъ $x=\frac{m}{n}\frac{\pi}{2}$ и вычислимъ коэффиціенты съ 22-мя десятичными знаками, то получимъ слѣдующія формулы

$\cos\left(\frac{m}{n}.90^\circ\right)=$	$\sin\left(\frac{m}{n}.90^\circ\right)=$
$1,00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00$	$1,57079\ 63267\ 94896\ 61923\ 13\frac{m}{n}$
$-1,23370\ 05501\ 36169\ 82735\ 43\frac{m^2}{n^2}$	$-0,64596\ 40975\ 06246\ 25365\ 58\frac{m^3}{n^3}$
$+0,25366\ 95079\ 01048\ 01363\ 66\frac{m^4}{n^4}$	$+0,07969\ 26262\ 46167\ 04512\ 05\frac{m^5}{n^5}$
$-0,02086\ 34807\ 63352\ 96087\ 31\frac{m^6}{n^6}$	$-0,00468\ 17541\ 35318\ 68810\ 07\frac{m^7}{n^7}$
$+0,00091\ 92602\ 74839\ 42658\ 02\frac{m^8}{n^8}$	$+0,00016\ 04411\ 84787\ 35982\ 19\frac{m^9}{n^9}$
$-0,00002\ 52020\ 42373\ 06060\ 55\frac{m^{10}}{n^{10}}$	$-0,00000\ 35988\ 43235\ 21208\ 53\frac{m^{11}}{n^{11}}$
$+0,00000\ 04710\ 87477\ 88181\ 72\frac{m^{12}}{n^{12}}$	$+0,00000\ 00569\ 21729\ 21967\ 93\frac{m^{13}}{n^{13}}$
$-0,00000\ 00063\ 86603\ 08379\ 19\frac{m^{14}}{n^{14}}$	$-0,00000\ 00006\ 68803\ 51093\ 11\frac{m^{15}}{n^{15}}$
$+0,00000\ 00000\ 65659\ 63114\ 98\frac{m^{16}}{n^{16}}$	$+0,00000\ 00000\ 06066\ 93573\ 11\frac{m^{17}}{n^{17}}$
$-0,00000\ 00000\ 00529\ 44002\ 01\frac{m^{18}}{n^{18}}$	$-0,00000\ 00000\ 00043\ 77065\ 47\frac{m^{19}}{n^{19}}$
$+0,00000\ 00000\ 00003\ 43773\ 92\frac{m^{20}}{n^{20}}$	$+0,00000\ 00000\ 00000\ 25714\ 23\frac{m^{21}}{n^{21}}$
$-0,00000\ 00000\ 00000\ 01835\ 99\frac{m^{22}}{n^{22}}$	$-0,00000\ 00000\ 00000\ 00125\ 39\frac{m^{23}}{n^{23}}$
$+0,00000\ 00000\ 00000\ 00008\ 21\frac{m^{24}}{n^{24}}$	$+0,00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 52\frac{m^{25}}{n^{25}}$
$-0,00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 03\frac{m^{26}}{n^{26}}$	

Синусы и косинусы дугъ, начиная съ нуля и кончая 45 градусами, заключаютъ синусы и косинусы дугъ съ 45 до 90 граду-

совъ; слѣдовательно, мы можемъ всегда предположить $\frac{m}{n} < \frac{1}{2}$ въ предыдущихъ формулахъ, и предыдущіе ряды будутъ настолько быстро сходящіеся, что намъ придется вычислять только весьма малое число членовъ, въ особенности, если мы не имѣемъ надобности въ слишкомъ большомъ числѣ десятичныхъ знаковъ.

Если послѣдовательно положимъ $\frac{m}{n} = \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}$, то получимъ слѣдующіе результаты:

$$\begin{aligned}
&\sin 9^\circ = \cos 81^\circ = 0{,}15643\ 44650\ 40231,\\
&\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = 0{,}30901\ 69943\ 74947,\\
&\sin 27^\circ = \cos 63^\circ = 0{,}45399\ 04997\ 39547,\\
&\sin 36^\circ = \cos 54^\circ = 0{,}58778\ 52552\ 92473,\\
&\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 0{,}70710\ 67811\ 86548,\\
&\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = 0{,}80901\ 69943\ 74947,\\
&\sin 63^\circ = \cos 27^\circ = 0{,}89100\ 65241\ 88368,\\
&\sin 72^\circ = \cos 18^\circ = 0{,}95105\ 65162\ 95154,\\
&\sin 81^\circ = \cos 9^\circ = 0{,}98768\ 83405\ 95138,
\end{aligned}$$

которые согласуются съ формулами n° 37.

Разложенія функцій cos x и sin x на произвольное, но ограниченное, число множителей.

185. Изъ формулъ n° 163 или изъ формулъ n° 181 слѣдуетъ, что если m число четное, то $\cos ma$ и $\frac{\sin ma}{m \sin a \cos a}$ будутъ цѣлыя функціи $\sin a$, приводящіяся какъ одна, такъ и другая къ единицѣ при $\sin a = 0$. Кромѣ того, первая изъ этихъ функцій, которая будетъ m-ой степени въ отношеніи къ $\sin a$, обращается въ нуль, точно также какъ и $\cos ma$ для всѣхъ значеній a, заключающихся въ рядѣ

$$\frac{-(m-1)\pi}{2m}, \ldots, -\frac{3\pi}{2m}, -\frac{\pi}{2m}, +\frac{\pi}{2m}, +\frac{3\pi}{2m}, \ldots, +\frac{(m-1)\pi}{2m};$$

слѣдовательно, она дѣлится на каждаго изъ двучленныхъ сомножителей:

$$1-\frac{\sin^2 a}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}, \quad 1-\frac{\sin^2 a}{\sin^2\frac{3\pi}{2m}}, \ldots, \quad 1-\frac{\sin^2 a}{\sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m}},$$

и такъ какъ она обращается въ 1 при $\sin a = 0$, то, слѣдовательно, она равна произведенію всѣхъ этихъ биномовъ.

Вторая функція будетъ $(m-2)$-ой степени по отношенію къ $\sin a$ и будетъ обращаться въ нуль для значеній a, заключающихся въ рядѣ

$$-\frac{(m-2)\pi}{2m}, \ldots, -\frac{4\pi}{2m}, -\frac{2\pi}{2m}, +\frac{2\pi}{2m}, +\frac{4\pi}{2m}, \ldots, +\frac{(m-2)\pi}{2m};$$

слѣдовательно, она дѣлится на каждаго изъ множителей

$$1-\frac{\sin^2 a}{\sin^2\frac{2\pi}{2m}}, \quad 1-\frac{\sin^2 a}{\sin^2\frac{4\pi}{2m}}, \ldots, \quad 1-\frac{\sin^2 a}{\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m}},$$

и равна произведенію всѣхъ этихъ множителей.

Слѣдовательно, подставляя $\frac{x}{m}$ вмѣсто a, будемъ имѣть для четныхъ значеній m

$$(1)\quad \begin{cases} \cos x = \left(1-\dfrac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\dfrac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\ldots\left(1-\dfrac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m}}\right), \\ \sin x = m\sin\dfrac{x}{m}\cos\dfrac{x}{m}\left(1-\dfrac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{2\pi}{2m}}\right)\ldots\left(1-\dfrac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m}}\right). \end{cases}$$

Разсуждая подобнымъ же образомъ, мы получимъ для нечетныхъ значеній m

$$(2)\quad \begin{cases} \cos x = \cos\dfrac{x}{m}\left(1-\dfrac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\dfrac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\ldots\left(1-\dfrac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m}}\right), \\ \sin x = m\sin\dfrac{x}{m}\left(1-\dfrac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{2\pi}{2m}}\right)\left(1-\dfrac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{4\pi}{2m}}\right)\ldots\left(1-\dfrac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m}}\right). \end{cases}$$

Если преобразуемъ формулы (1) и (2), воспользовавшись для этого тожественнымъ соотношеніемъ

$$1-\frac{\sin^2 u}{\sin^2 v} = \cos^2 u\left(1-\frac{\tan g^2 u}{\tan g^2 v}\right),$$

то будемъ имѣть для четныхъ значеній m

$$(3)\begin{cases} \cos x = \cos^m \frac{x}{m}\left(1-\frac{\operatorname{tang}^2\frac{n}{m}}{\operatorname{tang}^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\operatorname{tang}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\operatorname{tang}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2\frac{(m-1)\pi}{2m}}\right), \\ \sin x = \cos^m \frac{x}{m}\cdot m\operatorname{tang}\frac{x}{m}\left(1-\frac{\operatorname{tang}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2\frac{2\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\operatorname{tang}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2\frac{(m-2)\pi}{2m}}\right), \end{cases}$$

и для нечетныхъ значеній m

$$(4)\begin{cases} \cos x = \cos^m \frac{x}{m}\left(1-\frac{\operatorname{tang}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\operatorname{tang}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\operatorname{tang}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2\frac{(m-2)\pi}{2m}}\right), \\ \sin x = \cos^m \frac{x}{m}\cdot m\operatorname{tang}\frac{x}{m}\left(1-\frac{\operatorname{tang}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2\frac{2\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\operatorname{tang}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2\frac{(m-1)\pi}{2m}}\right). \end{cases}$$

Разложенія функцій $\cos x$ и $\sin x$ на безпредѣльное число множителей.

186. Лемма. — *Если дуга x возрастаетъ отъ нуля до $\frac{\pi}{2}$, то отношеніе $\frac{\sin x}{x}$ уменьшается, а отношеніе $\frac{\operatorname{tang} x}{x}$ увеличивается; другими словами, имѣемъ*

$$\frac{\sin(x+h)}{x+h} < \frac{\sin x}{x} \quad \text{и} \quad \frac{\operatorname{tang}(x+h)}{x+h} > \frac{\operatorname{tang} x}{x},$$

если x и h положительны и $x+h$ меньше $\frac{\pi}{2}$.

Въ самомъ дѣлѣ, если умножимъ первое неравенство на $\frac{x+h}{h\cos x}$, раскроемъ $\sin(x+h)$ и перенесемъ всѣ члены въ правую часть его, то получимъ неравенство

$$\operatorname{tang} x\,\frac{1-\cos h}{h} + \left(\frac{\operatorname{tang} x}{x} - \frac{\sin h}{h}\right) > 0,$$

справедливость котораго устанавливается немедленно, такъ какъ

разность $1-\cos h$ число положительное и разность $\frac{\operatorname{tang} x}{x} - \frac{\sin h}{h}$ также число положительное, потому что $\frac{\operatorname{tang} x}{x} > 1$, тогда какъ $\frac{\sin h}{h} < 1$.

Слѣдуетъ замѣтить, что отношеніе $\frac{\sin x}{x}$ непрерывно уменьшается, когда x возрастаетъ отъ $\frac{\pi}{2}$ до π, такъ какъ въ этомъ случаѣ числитель уменьшается, тогда какъ знаменатель увеличивается.

Что же касается до второго изъ двухъ предложенныхъ неравенствъ, то, замѣнивъ въ немъ тангенсы ихъ значеніями въ синусахъ и косинусахъ, его легко представимъ въ такомъ видѣ

$$\frac{\sin(h+2x)}{h+2x} < \frac{\sin h}{h},$$

справедливость же послѣдняго неравенства доказана.

Слѣдствіе. — *Если x и $x+h$ заключаются между нулемъ и $\frac{\pi}{2}$, то*

$$\frac{\sin(x+h)}{\sin x} < \frac{x+h}{x} < \frac{\operatorname{tang}(x+h)}{\operatorname{tang} x}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что если мы обозначимъ чрезъ u и v какія нибудь двѣ дуги, заключающіяся между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, то будемъ имѣть

$$\pm\left(1-\frac{\sin^2 u}{\sin^2 v}\right) < \pm\left(1-\frac{u^2}{v^2}\right) < \pm\left(1-\frac{\operatorname{tang}^2 u}{\operatorname{tang}^2 v}\right),$$

гдѣ двойной знакъ $\pm$ указываетъ на то, что должно взять абсолютное значеніе числа, которому онъ приписанъ.

187. Предыдущее слѣдствіе даетъ намъ средство опредѣлить, во что обращаются выраженія $\cos x$ и $\sin x$, полученныя въ n° 185, когда цѣлое число m обращается въ безконечность; возьмемъ, напримѣръ, формулы (1) и (3), въ которыхъ m обозначаетъ число четное, и умножимъ каждую изъ нихъ на множителя ± 1, согласившись брать тотъ знакъ, который дѣлаетъ члены положительными. Предположивъ, что число m достаточно велико для того, чтобы абсолютное значеніе $\frac{x}{m}$ было меньше $\frac{\pi}{2}$, и воспользовавшись неравенствами

$$\pm\sin\frac{x}{m} < \pm\frac{x}{m} < \pm\operatorname{tang}\frac{x}{m}, \quad \cos\frac{x}{m} < 1,$$

и тѣми, которыя мы получили изъ слѣдствія n° 186, мы на основаніи формулъ (1) и (3) n° 185 найдемъ

$$\pm\cos x < \pm\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{4x^2}{(m-1)^2\pi^2}\right),$$

$$\pm\cos x > \pm\cos^m\frac{x}{m}\cdot\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{4x^2}{(m-1)^2\pi^2}\right),$$

и

$$\pm\sin x < \pm x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{(m-2)^2\pi^2}\right),$$

$$\pm\sin x > \pm\cos^m\frac{x}{m}\cdot x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{(m-2)^2\pi^2}\right).$$

Но мы видѣли (n° 183), что

$$\cos^m\frac{x}{m}=1-\Theta_m,$$

гдѣ Θ_m число, обращающееся въ нуль при $m=\infty$; слѣдовательно, если мы обозначимъ чрезъ ε_m и η_m числа меньшія Θ_m, то будемъ имѣть

$$(1)\quad\begin{cases}\cos x=\left(1-\dfrac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\dfrac{4x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{4x^2}{(m-1)^2\pi^2}\right)(1-\varepsilon_m),\\ \sin x=x\left(1-\dfrac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\dfrac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{x^2}{(m-2)^2\pi^2}\right)(1-\eta_m).\end{cases}$$

Если предположимъ теперь, что цѣлое число m будетъ стремиться къ безконечности, и примемъ во вниманіе, что ε_m и η_m будутъ стремиться къ нулю, то въ предѣлѣ получимъ

$$(2)\quad\begin{cases}\cos x=\left(1-\dfrac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\dfrac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\dfrac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots,\\ \sin x=x\left(1-\dfrac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\dfrac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\dfrac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots.\end{cases}$$

Эти формулы даютъ значенія $\cos x$ и $\sin x$, разложенныя на безконечное число линейныхъ сомножителей; періодичность этихъ функцій очевидна.

188. Формула Валлиса.—Первая изъ предыдущихъ формулъ можетъ быть написана такъ

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\frac{\pi}{2}-x}=\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots.$$

Полагая $x=\frac{\pi}{2}$, получимъ замѣчательную формулу

$$\frac{\pi}{2}=2\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1-\frac{1}{49}\right)\cdots,$$

или

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots,$$

принадлежащую геометру Валлису и дающую значеніе $\frac{\pi}{2}$ какъ предѣлъ произведенія безконечнаго числа дробей, поперемѣнно большихъ и меньшихъ единицы.

Разложенія функцій tang x и cot x на произвольное, но ограниченное число дробей.

189. Если $f'(z)$ обозначаетъ производную многочлена $f(z)$ m-ой степени и если $a_1, a_2, \ldots, a_m$ суть m корней уравненія $f(z)=0$, то будемъ имѣть

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{z-a_1}+\frac{1}{z-a_2}+\cdots+\frac{1}{z-a_m};$$

кромѣ того, если a_1 и a_2 мнимыя сопряженныя числа, положивъ $a_1=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, $a_2=r(\cos\alpha-i\sin\alpha)$, найдемъ, что сумма двухъ дробей $\frac{1}{z-a_1}$, $\frac{1}{z-a_2}$ будетъ

$$\frac{2z-2r\cos\alpha}{z^2-2rz\cos\alpha+r^2}.$$

Приложивъ этотъ результатъ къ двумъ многочленамъ z^m+r^m и z^m-r^m, которые, какъ одинъ, такъ и другой, имѣютъ производную mz^{m-1}, будемъ имѣть (n° 175) для четныхъ значеній m

$$\frac{mz^{m-1}}{z^m+r^m}=\frac{2z-2r\cos\frac{\pi}{m}}{z^2-2rz\cos\frac{\pi}{m}+r^2}+\cdots+\frac{2z-2r\cos\frac{(m-1)\pi}{m}}{z^2-2rz\cos\frac{(m-1)\pi}{m}+r^2},$$

$$\frac{mz^{m-1}}{z^m-r^m}=\frac{1}{z+r}+\frac{1}{z-r}+\frac{2z-2r\cos\frac{2\pi}{m}}{z^2-2rz\cos\frac{2\pi}{m}+r^2}+\cdots$$
$$+\frac{2z-2r\cos\frac{(m-2)\pi}{m}}{z^2-2rz\cos\frac{(m-2)\pi}{m}+r^2},$$

и для нечетныхъ значеній m

$$\frac{mz^{m-1}}{z^m+r^m}=\frac{1}{z+r}+\frac{2z-2r\cos\frac{m}{\pi}}{z^2-2rz\cos\frac{m}{\pi}+r^2}+\cdots$$
$$+\frac{2z-2r\cos\frac{(m-2)\pi}{m}}{z^2-2rz\cos\frac{(m-2)\pi}{m}+r^2},$$

$$\frac{mz^{m-1}}{z^m-r^m}=\frac{1}{z-r}+\frac{2z-2r\cos\frac{2\pi}{m}}{z^2-2rz\cos\frac{2\pi}{m}+r^2}+\cdots$$
$$+\frac{2z-2r\cos\frac{(m-1)\pi}{m}}{z^2-2rz\cos\frac{(m-1)\pi}{m}+r^2}.$$

Умножимъ эти четыре уравненіе на z и изъ каждаго изъ полученныхъ уравненій соотвѣтственно вычтемъ уравненія, получающіяся изъ послѣднихъ при перестановкѣ въ нихъ буквъ z и r; получимъ для четныхъ значеній m

$$(1)\quad\begin{cases} m\dfrac{z^m-r^m}{z^m+r^m}=2\dfrac{z^2-r^2}{z^2-2rz\cos\frac{\pi}{m}+r^2}+\cdots \\ \qquad +2\dfrac{z^2-r^2}{z^2-2rz\cos\frac{(m-1)\pi}{m}+r^2}, \\ m\dfrac{z^m+r^m}{z^m-r^m}=2\dfrac{z^2+r^2}{z^2-r^2}+2\dfrac{z^2-r^2}{z^2-2rz\cos\frac{2\pi}{m}+r^2}+\cdots \\ \qquad +2\dfrac{z^2-r^2}{z^2-2rz\cos\frac{(m-2)\pi}{m}+r^2}, \end{cases}$$

и для нечетныхъ значеній m

$$(2)\quad\begin{cases} m\dfrac{z^m-r^m}{z^m+r^m}=\dfrac{z-r}{z+r}+2\dfrac{z^2-r^2}{z^2-2rz\cos\frac{\pi}{m}+r^2}+\cdots \\ \qquad +2\dfrac{z^2-r^2}{z^2-2rz\cos\frac{(m-1)\pi}{m}+r^2}, \\ m\dfrac{z^m+r^m}{z^m-r^m}=\dfrac{z+r}{z-r}+2\dfrac{z^2-r^2}{z^2-2rz\cos\frac{2\pi}{m}+r^2}+\cdots \\ \qquad +2\dfrac{z^2-r^2}{z^2-2rz\cos\frac{(m-1)\pi}{m}+r^2}. \end{cases}$$

Положивъ

$$z=\cos\frac{x}{m}+i\sin\frac{x}{m},\quad r=\cos\frac{x}{m}-i\sin\frac{x}{m},$$

получимъ для четныхъ значеній m

$$(3)\quad\begin{cases} tang\,x=\dfrac{2}{m}cot\dfrac{x}{m} \\ \qquad\times\left[\dfrac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{\pi}{2m}-\sin^2\frac{x}{m}}+\cdots+\dfrac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m}-\sin^2\frac{x}{m}}\right], \\ cot\,x=\dfrac{2}{m}\,cot\,\dfrac{2x}{m}-\dfrac{2}{m}\,cot\,\dfrac{x}{m} \\ \qquad\times\left[\dfrac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{2\pi}{2m}-\sin^2\frac{x}{m}}+\cdots+\dfrac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m}-\sin^2\frac{x}{m}}\right], \end{cases}$$

и для нечетныхъ значеній m

$$(4)\quad\begin{cases} tang\,x=\dfrac{1}{m}\,tang\,\dfrac{x}{m}+\dfrac{2}{m}\,cot\,\dfrac{x}{m} \\ \qquad\times\left[\dfrac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{\pi}{2m}-\sin^2\frac{x}{m}}+\cdots+\dfrac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m}-\sin^2\frac{x}{m}}\right], \\ cot\,x=\dfrac{1}{m}\,cot\,\dfrac{x}{m}-\dfrac{2}{m}\,cot\,\dfrac{x}{m} \\ \qquad\times\left[\dfrac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{2\pi}{2m}-\sin^2\frac{x}{m}}+\cdots+\dfrac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m}-\sin^2\frac{x}{m}}\right]. \end{cases}$$

Если выразимъ синусы, входящіе въ выраженія въ скобкахъ, чрезъ тангенсы, то будемъ имѣть еще для четныхъ значеній m

$$(5)\quad \begin{cases} tang x = tang\frac{x}{m} + \frac{2}{m}\left(cot\frac{x}{m} + tang\frac{x}{m}\right) \\ \times\left[\frac{tang^2\frac{x}{m}}{tang^2\frac{\pi}{2m} - tang^2\frac{x}{m}} + \ldots + \frac{tang^2\frac{x}{m}}{tang^2\frac{(m-1)\pi}{2m} - tang^2\frac{x}{m}}\right], \\ cot x = \left(\frac{2}{m}cot\frac{2x}{m} - tang\frac{x}{m}\right) - \frac{2}{m}\left(cot\frac{x}{m} + tang\frac{x}{m}\right) \\ \times\left[\frac{tang^2\frac{x}{m}}{tang^2\frac{2\pi}{2m} - tang^2\frac{x}{m}} + \ldots + \frac{tang^2\frac{x}{m}}{tang^2\frac{(m-2)\pi}{2m} - tang^2\frac{x}{m}}\right], \end{cases}$$

и для нечетныхъ значеній m

$$(6)\quad \begin{cases} tang x = tang\frac{x}{m} + \frac{2}{m}\left(cot\frac{x}{m} + tang\frac{x}{m}\right) \\ \times\left[\frac{tang^2\frac{x}{m}}{tang^2\frac{\pi}{2m} - tang^2\frac{x}{m}} + \ldots + \frac{tang^2\frac{x}{m}}{tang^2\frac{(m-2)\pi}{2m} - tang^2\frac{x}{m}}\right], \\ cot x = \frac{1}{m}\left(cot\frac{x}{m} + tang\frac{x}{m}\right) - tang\frac{x}{m} - \frac{2}{m}\left(cot\frac{x}{m} + taag\frac{x}{m}\right) \\ \times\left[\frac{tang^2\frac{x}{m}}{tang^2\frac{2\pi}{2m} - tang^2\frac{x}{m}} + \ldots + \frac{tang^2\frac{x}{m}}{tang^2\frac{(m-1)\pi}{2m} - tang^2\frac{x}{m}}\right]. \end{cases}$$

Разложенія функцій tang x и cot x на безконечное число простыхъ дробей.

190. Легко найти, во что обратятся формулы (3) и (4) или (5) и (9) n° 189, при предположеніи, что цѣлое число m, въ нихъ заключающееся, безпредѣльно возрастаетъ. Для большей простоты, предположимъ сперва, что x заключается между 0 и $\frac{\pi}{2}$ и тогда всѣ дроби, заключающіяся въ скобкахъ въ формулахъ (3), (4), (5), (6), будутъ положительны. Мы разсмотримъ только формулы (3) и (5).

въ которыхъ m число четное, при чемъ воспользуемся леммой, доказанной въ n° 186; будемъ имѣть, на основаніи слѣдствія леммы,

$$\frac{sin^2 v}{sin^2 u - sin^2 v} > \frac{v^2}{u^2 - v^2} > \frac{tang^2 v}{tang^2 u - tang^2 v},$$

если u больше v и если u и v заключаются между 0 и $\frac{\pi}{2}$.

При помощи этихъ неравенствъ мы выводимъ изъ формулъ (3) и (5) n° 189

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{tang\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}} tang x > \frac{2x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2} + \ldots + \frac{2x}{\left[\frac{(m-1)\pi}{2}\right]^2 - x^2}, \\ \frac{sin\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}} cos\frac{x}{m}\left(tang x - tang\frac{x}{m}\right) \\ \qquad < \frac{2x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2} + \ldots + \frac{2\pi}{\left[\frac{(m-1)\pi}{2}\right]^2 - x^2} \end{cases}$$

и

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{sin\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}} cos\frac{x}{m}\left[cot x + \left(1 + \frac{2}{m}\right)tang\frac{x}{m}\right] \\ \qquad > \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2 - x^2} - \ldots - \frac{2x}{\left[\frac{(m-2)\pi}{2}\right]^2 - x^2}, \\ \frac{tang\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}\left(cot x + \frac{1}{m}tang\frac{x}{m}\right) \\ \qquad < \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2 - x^2} - \ldots - \frac{2x}{\left[\frac{(m-2)\pi}{2}\right]^2 - x^2}. \end{cases}$$

Если цѣлое четное число m будетъ безпредѣльно возрастать, то лѣвыя части неравенствъ (1) будутъ стремиться какъ та, такъ и другая къ предѣлу $tang x$; слѣдовательно, суммы правыхъ частей приводятся къ сходящимся рядамъ, сумма каждаго изъ которыхъ равна $tang x$. Равнымъ образомъ лѣвыя части неравенствъ (2)

имѣютъ какъ та, такъ и другая, предѣломъ $cotx$; откуда слѣдуетъ, что суммы, составляющія правыя ихъ части, обратятся въ сходящіеся ряды, сумма каждаго изъ которыхъ будетъ $cotx$. Слѣдовательно, будемъ имѣть формулы

$$(3)\quad \begin{cases} tang x = \dfrac{2x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2} + \dfrac{2x}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 - x^2} + \dfrac{2x}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2 - x^2} + \cdots, \\ cot x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2x}{\pi^2 - x^2} - \dfrac{2x}{(2\pi)^2 - x^2} - \dfrac{2x}{(3\pi)^2 - x^2} + \cdots, \end{cases}$$

которыя могутъ быть написаны слѣдующимъ образомъ:

$$(4)\quad \begin{cases} tang x = \left(\dfrac{1}{\frac{\pi}{2} - x} - \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + x}\right) + \left(\dfrac{1}{\frac{3\pi}{2} - x} - \dfrac{1}{\frac{3\pi}{2} + x}\right) + \cdots, \\ cot x = \dfrac{1}{x} - \left(\dfrac{1}{\pi - x} - \dfrac{1}{\pi + x}\right) - \left(\dfrac{1}{2\pi - x} - \dfrac{1}{2\pi + x}\right) - \cdots. \end{cases}$$

Чтобы вывести формулы (3) и (4), мы предположили, что x заключается между нулемъ и $\frac{\pi}{2}$; но такъ какъ въ правыхъ частяхъ такъ же, какъ и въ лѣвыхъ, измѣняются только знаки на обратные, когда замѣнимъ x чрезъ $-x$, то мы видимъ, что формулы справедливы для значеній x, заключающихся между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$; наконецъ, мы непосредственно замѣчаемъ, что правыя части формулъ (4) не измѣняются, когда замѣнимъ x чрезъ $x+\pi$; это будутъ, иными словами, функціи періодическія x, которыя имѣютъ тотъ же періодъ, что и лѣвыя части. Отсюда слѣдуетъ, что формулы (3) и (4) остаются въ силѣ для всѣхъ значеній x, заключающихся между $-\infty$ и $+\infty$; такимъ образомъ мы видимъ, что функціи $tang x$ и $cot x$ можно разложить на безконечное число простыхъ дробей, числители которыхъ равны единицѣ, а знаменатели двучлены первой степени, которые, будучи приравнены нулю, дадутъ корни уравненій

$$tang x = \infty, \quad cot x = \infty.$$

Замѣтимъ, наконецъ, что каждая изъ двухъ формулъ (3) или (4) можетъ быть выведена одна изъ другой, если въ нихъ замѣнимъ x чрезъ $\frac{\pi}{2} - x$.

Если раздѣлимъ первое изъ уравненій (3) на x и положимъ $x=0$, то получимъ формулу

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots;$$

равнымъ образомъ, если отъ обѣихъ частей второго уравненія (3) отнимемъ по $\frac{1}{x}$, затѣмъ раздѣлимъ обѣ части на x и, наконецъ, положимъ $x=0$, то получимъ, воспользовавшись формулами (5) п° 183.

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots,$$

и, раздѣливъ на 4,

$$\frac{\pi^2}{24} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \cdots;$$

сходимость этихъ рядовъ очевидно слѣдуетъ изъ самаго анализа, который привелъ насъ къ нимъ.

Разложенія функцій cosecx и secx на безконечное число простыхъ дробей.

191. Имѣемъ

$$cosec x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2} tang \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} cot \frac{1}{2}x;$$

если въ уравненіяхъ (4) п° 190 замѣнимъ x чрезъ $\frac{1}{2}x$ и затѣмъ составимъ полусумму полученныхъ результатовъ, то будемъ имѣть

$$(1)\quad \begin{cases} cosec x = \dfrac{1}{x} + \left(\dfrac{1}{\pi - x} - \dfrac{1}{\pi + x}\right) - \left(\dfrac{1}{2\pi - x} - \dfrac{1}{2\pi + x}\right) \\ \qquad + \left(\dfrac{1}{3\pi - x} - \dfrac{1}{3\pi + x}\right) - \cdots; \end{cases}$$

откуда, замѣняя x чрезъ $\frac{\pi}{2} - x$, получимъ

$$(2)\quad \begin{cases} sec x = \left(\dfrac{1}{\frac{\pi}{2} - x} + \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + x}\right) - \left(\dfrac{1}{\frac{3\pi}{2} - x} + \dfrac{1}{\frac{3\pi}{2} + x}\right) \\ \qquad + \left(\dfrac{1}{\frac{5\pi}{2} - x} + \dfrac{1}{\frac{5\pi}{2} + x}\right) - \cdots. \end{cases}$$

Эти формулы могутъ быть написаны еще слѣдующимъ образомъ:

$$(3)\quad \begin{cases} cosec\,x=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x}{\pi^2-x^2}-\dfrac{2x}{(2\pi)^2-x^2}+\dfrac{2x}{(3\pi)^2-x^2}-\ldots, \\ sec\,x=\dfrac{\pi}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-x^2}-\dfrac{3\pi}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2-x^2}+\dfrac{5\pi}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2-x^2}-\ldots; \end{cases}$$

полагая во второмъ равенствѣ (3) $x=0$, получимъ

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots.$$

Разложеніе функцій tang x и cot x въ ряды, расположенные по восходящимъ степенямъ x.

192. Если положимъ

$$(1)\quad \begin{cases} tang\,x-R_n=\dfrac{2x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-x^2}+\ldots+\dfrac{2x}{\left[\frac{(2n-1)\pi}{2}\right]^2-x^2}, \\ cot\,x-R'_n=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2x}{\pi^2-x^2}-\ldots-\dfrac{2x}{[(n-1)\pi]^2-x^2}, \end{cases}$$

то числа R_n и R'_n будутъ стремиться къ нулю (n° 190), когда n будетъ стремиться къ безконечности. Но

$$\frac{1}{a-z}=\frac{1}{a}+\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}+\ldots$$

для всѣхъ значеній z, заключающихся между $-a$ и $+a$; слѣдовательно, дроби правой части перваго изъ равенствъ (1) разлагаются по возрастающимъ степенямъ x въ сходящіеся ряды для всѣхъ значеній x, заключающихся между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$; равнымъ образомъ, дроби, входящія въ значеніе $cot\,x-R'_n$, начиная со второй, также разлагаются въ сходящіеся ряды, расположенные по восходящимъ степенямъ x, для всѣхъ значеній x, заключающихся между $-\pi$ и $+\pi$; произведя эти разложенія, будемъ имѣть

$$(2)\quad \begin{cases} tang\,x-R_n=\dfrac{2^2}{\pi^2}\left[\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)^2}\right]x \\ \qquad\qquad +\dfrac{2^5}{\pi^4}\left[\dfrac{1}{1^4}+\dfrac{1}{3^4}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)^4}\right]x^3+\ldots, \\ cot\,x-R'_n=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{\pi^2}\left[\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)^2}\right]x \\ \qquad\qquad -\dfrac{2}{\pi^4}\left[\dfrac{1}{1^4}+\dfrac{1}{2^4}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)^4}\right]x^3-\ldots. \end{cases}$$

Мы показали въ n° 190, что ряды

$$\frac{1}{1^{2\mu}}+\frac{1}{3^{2\mu}}+\frac{1}{5^{2\mu}}+\ldots,\quad \frac{1}{1^{2\mu}}+\frac{1}{2^{2\mu}}+\frac{1}{3^{2\mu}}+\ldots$$

будутъ сходящіеся при $\mu=1$; а потому и подавно они сходящіеся при $\mu>1$. Слѣдовательно, если суммы этихъ двухъ рядовъ обозначимъ чрезъ $S_{2\mu}$ и $S'_{2\mu}$ и положимъ

$$S_{2\mu}=\frac{1}{1^{2\mu}}+\frac{1}{3^{2\mu}}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^{2\mu}}+\alpha_{2\mu},$$

$$S'_{2\mu}=\frac{1}{1^{2\mu}}+\frac{1}{2^{2\mu}}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^{2\mu}}+\alpha'_{2\mu},$$

то $(lim\,\alpha_{2\mu})_{n=\infty}=(lim\,\alpha'_{2\mu})_{n=\infty}=0$. Послѣ этого, мы можемъ написать уравненія (2) такъ:

$$(3)\quad \begin{cases} tang\,x-R_n=\left(\dfrac{2^2S_2}{\pi^2}x+\dfrac{2^5S_4}{\pi^4}x^3+\dfrac{2^7S_6}{\pi^6}x^5+\ldots\right) \\ \qquad\qquad -\dfrac{\pi}{4}\left[\alpha_2\dfrac{2x}{\pi}+\alpha_4\left(\dfrac{2x}{\pi}\right)^3+\ldots\right], \\ cot\,x-R'_n=\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2S'_2}{\pi^2}x-\dfrac{2S'_4}{\pi^4}x^3-\dfrac{2S'_6}{\pi^6}x^5-\ldots\right) \\ \qquad\qquad +\dfrac{2}{\pi}\left[\alpha'_2\dfrac{x}{\pi}+\alpha'_4\left(\dfrac{x}{\pi}\right)^3+\ldots\right]. \end{cases}$$

Слѣдовательно, если α обозначаетъ наибольшее изъ чиселъ α_2, $\alpha_4,\ldots$, α'_2, α'_4, то абсолютныя значенія двухъ суммъ

$$(4)\qquad \alpha^2\frac{2x}{\pi}+\alpha_4\left(\frac{2x}{\pi}\right)^3+\ldots,\quad \alpha'_2\frac{x}{\pi}+\alpha'_4\left(\frac{x}{\pi}\right)^3+\ldots$$

будутъ соотвѣтственно меньше произведеній числа α на абсолютныя значенія двухъ новыхъ суммъ

$$(5)\qquad \frac{2x}{\pi}+\left(\frac{2x}{\pi}\right)^3+\ldots,\quad \frac{x}{\pi}+\left(\frac{x}{\pi}\right)^3+\ldots.$$

Количества (5) представляютъ геометрическія прогрессіи, которыя будутъ сходящимися, первая для значеній x, заключающихся между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, а вторая для значеній x, заключающихся между $-\pi$ и $+\pi$; кромѣ того α обращается въ нуль, также какъ и R_n и R'_n, при $n=\infty$; слѣдовательно, мы въ предѣлѣ будемъ имѣть

$$(6)\quad \begin{cases} tang\,x=\frac{2^3S_2}{\pi^2}x+\frac{2^5S_4}{\pi^4}x^3+\frac{2^7S_6}{\pi^6}x^5+\ldots, \\ cot\,x=\frac{1}{x}-\frac{2S'_2}{\pi^2}x-\frac{2S'_4}{\pi^4}x^3-\frac{2S'_6}{\pi^6}x^5-\ldots; \end{cases}$$

первое изъ этихъ равенствъ будетъ справедливо для всѣхъ значеній x, заключающихся между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, а второе для значеній x, заключающихся между $-\pi$ и $+\pi$.

Имѣемъ тожество

$$S_{2\mu}=S'_{2\mu}-\frac{S'_{2\mu}}{2^{2\mu}}=\frac{2^{2\mu}-1}{2^{2\mu}}S'_{2\mu},$$

и если положимъ

$$(7)\quad \frac{B_\mu}{1.2\ldots2\mu}=\frac{1}{2^{2\mu-1}\pi^{2\mu}}\left(1+\frac{1}{2^{2\mu}}+\frac{2}{3^{2\mu}}+\frac{1}{4^{2\mu}}+\ldots\right),$$

то будемъ имѣть

$$(8)\quad S_{2\mu}=\frac{1}{2}\frac{(2^{2\mu}-1)\pi^{2\mu}B_\mu}{1.2\ldots2\mu},\quad S'_{2\mu}=\frac{2^{2\mu-1}\pi^{2\mu}B_\mu}{1.2\ldots2\mu}.$$

Замѣняя въ равенствахъ (6) $S_{2\mu}$ и $S'_{2\mu}$ этими значеніями, получимъ

$$(9)\quad \begin{cases} tang\,x=2^2(2^2-1)B_1\frac{x}{1.2}+\ldots+2^{2n}(2^{2n}-1)B_n\frac{x^{2n-1}}{1.2\ldots2n}+\ldots, \\ cot\,x=\frac{1}{x}-2^2B_1\frac{x}{1.2}-\ldots-2^{2n}B_n\frac{x^{2n-1}}{1.2\ldots2n}-\ldots. \end{cases}$$

Второе изъ равенствъ (9) принимаетъ болѣе изящный видъ, когда въ немъ замѣнимъ x чрезъ $\frac{x}{2}$; такимъ образомъ получимъ формулу

$$(10)\quad 1-\frac{x}{2}cot\frac{x}{2}=B_1\frac{x^2}{1.2}+B_2\frac{x^4}{1.2.3.4}+\ldots+B\frac{x^{2n}}{1.2\ldots2n}+\ldots,$$

которая справедлива для всѣхъ значеній x, заключающихся между -2π и $+2\pi$.

193. Коэффиціенты B_1, B_2, B_3,..., которые входятъ въ формулы (9) и (10), встрѣчаются во многихъ вопросахъ анализа; они извѣстны подъ названіемъ *чиселъ Бернулли*. Равенство (7) даетъ общее выраженіе этихъ чиселъ; но это выраженіе содержитъ трансцендентное число π и кромѣ того сумму безконечнаго ряда. Легко, какъ мы сейчасъ увидимъ, послѣдовательно опредѣлить числа B_1, B_2, B_3,..., которыя всѣ раціональны.

Мы знаемъ, что, если два ряда, расположенные по восходящимъ степенямъ въ отношеніи перемѣнной x, абсолютно сходящіеся, то, расположивъ по возрастающимъ степенямъ x произведеніе этихъ двухъ рядовъ, получимъ сходящійся рядъ; кромѣ того, сумма этого новаго ряда будетъ произведеніе суммъ двухъ первыхъ. На основаніи этого мы можемъ опредѣлить числа B_n при посредствѣ формулы (10), умножая ее на $1-cosx$ или на $sinx$; имѣемъ тожества

$$\left(1-\frac{x}{2}cot\frac{x}{2}\right)(1-cosx)=1-cosx-\frac{x}{2}sinx,$$
$$\left(1-\frac{x}{2}cot\frac{x}{2}\right)sinx=sinx-\frac{x}{2}(1+cosx);$$

если въ этихъ равенствахъ замѣнимъ $1-\frac{x}{2}cot\frac{x}{2}$, $sinx$ и $cosx$ чрезъ ряды, въ которые они были разложены, то найдемъ

$$\left(B_1\frac{x^2}{1.2}+B_2\frac{x^4}{1.2.3.4}+\ldots\right)\left(\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^4}{1.2.3.4}+\ldots\right)$$
$$=\left(\frac{x^3}{1.2}-\frac{x^5}{1.2.3.4}+\ldots\right)-\frac{x}{2}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\right),$$
$$\left(B_1\frac{x^2}{1.2}+B_2\frac{x^4}{1.2.3.4}+\ldots\right)\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\right)$$
$$=\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\right)-\frac{x}{2}\left(2-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots\right).$$

Произведя умноженія, указанныя въ правыхъ частяхъ, сравнивая затѣмъ коэффиціенты при x^{n+2} въ обѣихъ частяхъ первой изъ этихъ формулъ и коэффиціенты при x^{2n+1} въ обѣихъ частяхъ второй, получимъ:

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{1.2\ldots(2n+2)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.2\ldots(2n+1)} \\ &+ \frac{1}{1.2\ldots 2n}\,\frac{B_1}{1.2} - \frac{1}{1.2\ldots(2n-2)}\,\frac{B_2}{1.2.3.4} + \ldots \\ &+ (-1)^{\mu-1}\,\frac{1}{1.2\ldots(2n-2\mu+2)}\,\frac{B_\mu}{1.2\ldots 2\mu} + \ldots \\ &+ (-1)^{n-1}\frac{1}{1.2}\,\frac{B_n}{1.2\ldots 2n}, \end{aligned}\right.$$

и

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{1.2\ldots(2n+1)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.2\ldots 2n} \\ &+ \frac{1}{1.2\ldots(2n-1)}\,\frac{B_1}{1.2} - \frac{1}{1.2\ldots(2n-3)}\,\frac{B_2}{1.2.3.4} + \ldots \\ &+ (-1)^{\mu-1}\,\frac{1}{1.2\ldots(2n-2\mu+1)}\,\frac{B_\mu}{1.2\ldots 2\mu} + \ldots \\ &+ (-1)^{n-1}\frac{1}{1}\cdot\frac{B_n}{1.2\ldots 2n}; \end{aligned}\right.$$

любая изъ этихъ формулъ (11) и (12) опредѣлитъ B_n, если извѣстны B_1, B_2,...., B_{n-1}; напримѣръ, полагая въ формулѣ (12) послѣдовательно $n=1, 2, 3,\ldots..$, получимъ уравненія

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + B_1 = 0,$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{2}B_1 - B_2 = 0,$$

$$\frac{1}{7} - \frac{1}{2} + \frac{6}{2}B_1 - \frac{6.5.4}{2.3.4}B_2 + B_3 = 0,$$

$$\frac{1}{9} - \frac{1}{2} + \frac{8}{2}B_1 - \frac{8.7.6}{2.3.4}B_2 + \frac{8.7.6.5.4}{2.3.4.5.6}B_3 - B_4 = 0,$$

. . . . . ,

изъ которыхъ имѣемъ

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30},$$

$$B_5 = \frac{5}{66}, \quad B_6 = \frac{691}{2730}, \quad B_7 = \frac{7}{6}, \ldots.$$

Рядъ чиселъ Бернулли сперва нисходящъ, но, начиная съ B_3, числа Бернулли возрастаютъ. Полученныя нами соотношенія (11) и (12) не единственныя, которыя связываютъ между собою n первыхъ изъ этихъ чиселъ, каково бы ни было n; напримѣръ, мы можемъ получить два другія соотношенія, которыя слѣдуетъ замѣтить, при посредствѣ равенствъ (9). Дѣйствительно, имѣемъ

$$\cot x.\sin x = \cos x,$$
$$\operatorname{tang} x : \cos x = \sin x,$$

и, замѣняя тригонометрическія линіи ихъ разложеніями въ ряды, получимъ

$$\left(\frac{1}{x} - 2^2 B_1 \frac{x}{1.2} + \ldots\right)\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\right) = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \ldots.,$$

$$\left[2^2(2^2-1)B_1\frac{x}{1.2} + \ldots\right]\left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \ldots\right) = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Если составимъ произведенія и сравнимъ коэффиціенты въ обѣихъ частяхъ въ первой формулѣ при x^{2n}, а во второй формулѣ при x^{2n-1}, то получимъ

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{1.2\ldots 2n} - \frac{1}{1.2\ldots(2n+1)} - \frac{1}{1.2\ldots(2n-1)}2^2\,\frac{B_1}{1.2} \\ &+ \frac{1}{1.2\ldots(2n-3)}2^4\,\frac{B_2}{1.2.3.4} + \ldots \\ &+ (-1)^{\mu}\,\frac{1}{1.2\ldots(2n-2\mu+1)}2^{2\mu}\,\frac{B_\mu}{1.2\ldots 2\mu} + \ldots \\ &+ (-1)^n\frac{1}{1}2^{2n}\frac{B_n}{1.2\ldots 2n}, \end{aligned}\right.$$

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{1.2\ldots(2n-1)} - \frac{2^2(2^2-1)}{1.2\ldots(2n-2)}\,\frac{B_1}{1.2} + \ldots \\ &+ (-1)^{\mu}\,\frac{2^{2\mu}(2^{2\mu}-1)}{1.2\ldots(2n-2\mu)}\,\frac{B_\mu}{1.2\ldots 2\mu} + \ldots \\ &+ (-1)^n\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{1}\,\frac{B_n}{1.2\ldots 2n}. \end{aligned}\right.$$

Если подставимъ вышенайденныя значенія B_1, B_2, B_3.... въ формулы (8), то получимъ слѣдующіе результаты:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6},$$
$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{90},$$
$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\ldots=\frac{\pi^6}{945},$$
$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\ldots=\frac{\pi^8}{9450},$$
$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\ldots=\frac{\pi^{10}}{93555}.$$
. . . . . .

и

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8},$$
$$1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{96},$$
$$1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\ldots=\frac{\pi^6}{960},$$
$$1+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\ldots=\frac{17\pi^8}{161280},$$
$$1+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\frac{1}{7^{10}}+\ldots=\frac{31\pi^{10}}{2903040},$$
. . . . . .

и мы видимъ, что суммы рядовъ

$$1+\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+\frac{1}{4^{2m}}+\ldots \text{ и } 1+\frac{1}{3^{2m}}+\frac{1}{5^{2m}}+\ldots$$

содержатъ въ своемъ выраженіи, если m цѣлое число, только единственное трансцендентное число π.

Наконецъ, подставляя тѣ же самые значенія коэффиціентовъ B въ формулы (9), будемъ имѣть

$$(15)\quad \begin{cases} tang\,x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots, \\ cot\,x=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}-\frac{2x^5}{945}-\ldots. \end{cases}$$

194. Формулами (6) можно воспользоваться при составленіи таблицъ тангенсовъ и котангенсовъ. Если мы въ нихъ положимъ $x=\frac{m}{n}\frac{\pi}{2}$, то онѣ примутъ видъ

$$tang\left(\frac{m}{n}90^\circ\right)=\frac{4}{\pi}\left(S_2\frac{m}{n}+S_4\frac{m^3}{n^3}+S_6\frac{m^5}{n^5}+\ldots\right),$$
$$cot\left(\frac{m}{n}90^\circ\right)=\frac{2}{\pi}\frac{n}{m}-\frac{1}{\pi}\left(S'_2\frac{m}{n}+\frac{1}{2^2}S'_4\frac{m^3}{n^3}+\frac{1}{2^4}S'_6\frac{m^5}{n^5}+\ldots\right).$$

Эти формулы примѣнимы только въ случаѣ, если $\frac{m}{n}$ малая дробь, такъ какъ суммы S_2, S_4,..... S'_2, S'_4,..... медленно убываютъ. Можно было бы получить ряды болѣе удобные для вычисленія, если бы мы въ формулахъ (1) n° 192 не разлагали въ ряды дробей $\frac{2x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-x^2}$ и $\frac{2x}{\pi^2-x^2}$, которыя, при $x=\frac{m}{n}\frac{\pi}{2}$, соотвѣтственно приводятся къ $\frac{4}{\pi}\frac{mn}{n^2-m^2}$ и $\frac{-1}{\pi}\frac{4mn}{4n^2-m^2}$. Разложенія этихъ дробей будутъ

$$\frac{4}{\pi}\frac{mn}{n^2-m^2}=\frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{n}+\frac{m^3}{n^3}+\frac{m^5}{n^5}+\ldots\right),$$
$$-\frac{1}{\pi}\frac{4mn}{4n^2-m^2}=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{m}{n}+\frac{m^3}{2^2n^3}+\frac{m^5}{2^4n^5}+\ldots\right),$$

и если эти два равенства вычтемъ соотвѣтственно изъ двухъ предыдущихъ, то будемъ имѣть ряды

$$tang\left(\frac{m}{n}\,90^\circ\right)=\frac{4}{\pi}\frac{mn}{n^2-m^2}+\frac{4}{\pi}\left[(S_2-1)\frac{n}{m}+(S_4-1)\frac{m^3}{n^3}+\ldots\right],$$
$$cot\left(\frac{m}{n}\,90^\circ\right)=\frac{2}{\pi}\frac{n}{m}-\frac{1}{\pi}\frac{4mn}{4n^2-m^2}$$
$$-\frac{1}{\pi}\left[(S'_2-1)\frac{m}{n}+\frac{1}{4}(S'_4-1)\frac{m^3}{n^3}+\ldots\right],$$

члены которыхъ очень быстро убываютъ. Производя вычисленіе коэффиціентовъ съ двадцатью десятичными знаками, получимъ

$$tang\left(\frac{m}{n}\,90^\circ\right)+\frac{2mn}{n^2-m^2}\times 0{,}63661\ 97723\ 67581\ 34307\ 55$$
$$+0{,}29755\ 67820\ 59733\ 93308\frac{m}{n}\Big|+0{,}00019\ 75800\ 71520\ 47731\frac{m^7}{n^7}$$
$$+0{,}01868\ 86502\ 77329\ 82117\frac{m^3}{n^3}\Big|+0{,}00002\ 16977\ 37324\ 86026\frac{m^9}{n^9}$$
$$+0{,}00184\ 24752\ 03510\ 03578\frac{m^5}{n^5}\Big|+0{,}00000\ 24011\ 36991\ 41062\frac{m^{11}}{n^{11}}$$

$$+0{,}00000\ 02664\ 13303\ 42100\ \frac{m^{13}}{n^{13}} \quad +0{,}00000\ 00000\ 0\ 0006\ 1404\ \frac{m^{29}}{n^{29}}$$

$$+0{,}00000\ 00295\ 86467\ 68238\ \frac{m^{15}}{n^{15}} \quad +0{,}00000\ 00000\ 00000\ 68712\ \frac{m^{31}}{n^{31}}$$

$$+0{,}00000\ 00032\ 86788\ 37940\ \frac{m^{17}}{n^{17}} \quad +0{,}00000\ 00000\ 00000\ 07634\ \frac{m^{33}}{n^{33}}$$

$$+0{,}00000\ 00003\ 65174\ 90274\ \frac{m^{19}}{n^{19}} \quad +0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00848\ \frac{m^{35}}{n^{35}}$$

$$+0{,}00000\ 00000\ 40754\ 03828\ \frac{m^{21}}{n^{21}} \quad +0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00094\ \frac{m^{37}}{n^{37}}$$

$$+0{,}00000\ 00000\ 04508\ 28887\ \frac{m^{23}}{n^{23}} \quad +0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00010\ \frac{m^{39}}{n^{39}}$$

$$+0{,}00000\ 00000\ 00500\ 90831\ \frac{m^{25}}{n^{25}} \quad +0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00001\ \frac{m^{41}}{n^{41}}$$

$$+0{,}00000\ 00000\ 00055\ 65642\ \frac{m^{27}}{n^{27}} \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cot\left(\frac{m}{n}90^\circ\right) = \frac{n}{m} \times 0{,}63661\ 97723\ 67581\ 34307\ 55358\ 53490\ 05744\ 80126$$

$$-\frac{4mn}{4n^2-m^2} \times 0{,}31830\ 98861\ 83790\ 67153\ 8$$

$$-0{,}20528\ 88894\ 14508\ 20154\ \frac{m}{n} \quad -0{,}00000\ 00000\ 01158\ 35398\ \frac{m^{19}}{n^{19}}$$

$$-0{,}00655\ 10747\ 88218\ 49925\ \frac{m^3}{n^3} \quad -0{,}00000\ 00000\ 00072\ 38498\ \frac{m^{21}}{n^{21}}$$

$$-0{,}00034\ 50292\ 55396\ 77702\ \frac{m^5}{n^5} \quad -0{,}00000\ 00000\ 00004\ 52372\ \frac{m^{23}}{n^{23}}$$

$$-0{,}00002\ 02791\ 06051\ 55806\ \frac{m^7}{n^7} \quad -0{,}00000\ 00000\ 00000\ 28272\ \frac{m^{25}}{n^{25}}$$

$$-0{,}00000\ 12366\ 52717\ 72267\ \frac{m^9}{n^9} \quad -0{,}00000\ 00000\ 00000\ 01767\ \frac{m^{27}}{n^{27}}$$

$$-0{,}00000\ 00764\ 95881\ 61606\ \frac{m^{11}}{n^{11}} \quad -0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00110\ \frac{m^{29}}{n^{29}}$$

$$-0{,}00000\ 00047\ 59738\ 01257\ \frac{m^{13}}{n^{13}} \quad -0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00007\ \frac{m^{31}}{n^{31}}$$

$$-0{,}00000\ 00002\ 96905\ 16679\ \frac{m^{15}}{n^{15}} \quad - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-0{,}00000\ 00000\ 18540\ 68275\ \frac{m^{17}}{n^{17}}$$

Разложенія функцій cosecx и secx въ ряды, расположенные по восходящимъ степенямъ x.

195. Если въ равенствѣ

$$\operatorname{cosec} x = \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}x$$

замѣнимъ $\operatorname{tang}\frac{1}{2}x$ и $\cot\frac{1}{2}x$ ихъ разложеніями въ ряды, то получимъ формулу

$$(1) \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + (2^2-2)B_1\frac{x}{1.2} + \ldots + (2^{2n}-2)B_n\frac{x^{2n-1}}{1.2\ldots 2n} + \ldots,$$

которая будетъ справедлива при всѣхъ значеніяхъ x, заключающихся между $-\pi$ и $+\pi$.

Функція $\sec x$ можетъ быть также разложена въ сходящійся рядъ, расположенный по восходящимъ степенямъ x, но только при значеніяхъ x, заключающихся между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ двѣ функціи $\operatorname{tang} x$ и $\operatorname{cosec} x$ могутъ быть разложены въ ряды, расположенные по восходящимъ степенямъ x, при всѣхъ значеніяхъ x, заключающихся между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, то, на основаніи извѣстной теоремы, которой мы уже воспользовались въ n° 193, мы будемъ имѣть то же самое относительно произведенія $\operatorname{tang} x \operatorname{cosec} x$ или $\sec x$. Такъ какъ функція $\sec x$, при замѣнѣ x на $-x$, не измѣняется и такъ какъ эта функція, при $x=0$, приводится къ 1, то ея разложеніе будетъ непремѣнно вида

$$(2) \qquad \sec x = 1 + C_1\frac{x^2}{1.2} + C_2\frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots + C_n\frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} + \ldots.$$

Для опредѣленія коэффиціентовъ C_1, C_2, C_3,...., умножимъ предыдущую формулу на

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} + \ldots;$$

такъ какъ произведеніе лѣвыхъ частей равно 1, то различныя степени x должны будутъ исчезнуть въ произведеніи правыхъ частей. Приравнивая поэтому коэффиціентъ при x^{2n} нулю, получимъ формулу

$$0 = 1 - \frac{2n(2n-1)}{1.2}C_1 + \ldots + (-1)^\mu\frac{2n(2n-1)\ldots(2n-2\mu+1)}{1.2\ldots 2\mu}C_\mu + \ldots + (-1)^\mu C_n,$$

которая опредѣлитъ C_n, если мы будемъ знать C_1, C_2,..., C_{n-1}. Полагая послѣдовательно $n=1, 2, 3,...$, получимъ

$$1-C_1=0,$$

$$1-\frac{4.3}{1.2}C_1+C_2=0,$$

$$1-\frac{6.5}{1.2}C_1+\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}C_2-C_3=0,$$

.....

откуда

$$C_1=1,\ C_2=5,\ C_3=61....;$$

изъ предыдущихъ формулъ мы видимъ, что всѣ коэффиціенты C цѣлыя числа.

Если замѣнимъ коэффиціенты B и C ихъ значеніями, то формулы (1) и (2) примутъ видъ

$$cosecx=\frac{1}{x}+\frac{x}{6}+\frac{7x^3}{360}+\frac{31x^5}{15120}+...,$$

$$secx=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\frac{61x^6}{720}+....$$

Здѣсь имѣемъ случай замѣтить, что при помощи формулы (1) можно получить новыя линейныя соотношенія между коэффиціентами B. Напримѣръ, замѣняя въ тожествѣ

$$cotx.cosx=cosecx-sinx$$

тригонометрическія линіи ихъ значеніями, выраженными въ рядахъ, затѣмъ выполняя умноженіе, указанное въ лѣвой части и, наконецъ, сравнивая коэффиціенты въ обѣихъ частяхъ при x^{2n-2}, находимъ

$$\frac{1}{1.2...2n}-\frac{1}{1.2...(2n-1)}+\frac{1}{1.2...(2n-2)}2^2\frac{B_1}{1.2}$$

$$-(-1)^{\mu}\frac{1}{1.2...(2n-2\mu)}2^{2\mu}\frac{B_{\mu}}{1.2...2\mu}-...$$

$$-(-1)^{n-1}\frac{1}{1.2}2^{2n-2}\frac{B_{n-1}}{1.2...(2n-2)}$$

$$=(-1)^n2(2^{2n}-1)\frac{B_n}{1.2...2n}.$$

Мы показали (n° 191), что при всякомъ значеніи x имѣемъ

$$cosecx=\frac{1}{x}+\frac{2x}{\pi^2-x^2}-\frac{2x}{(2\pi)^2-x^2}+\frac{2x}{(3\pi)^2-x^2}-....$$

$$secx=\frac{\pi}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-x^2}-\frac{3\pi}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2-x^2}+\frac{5\pi}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2-x^2}-....$$

Если при посредствѣ дѣленія разложимъ въ ряды, расположенные по восходящимъ степенямъ x, дроби, заключающіяся въ правыхъ частяхъ этихъ формулъ, и отождествимъ результаты съ формулами (1) и (2), то получимъ

$$(3)\quad\begin{cases}1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+...=\frac{2-1}{1.2}B_1\pi^2=\frac{\pi^2}{12},\\ 1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+...=\frac{2^3-1}{1.2.3.4}B_2\pi^4=\frac{7\pi^4}{720},\\ 1-\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}-\frac{1}{4^6}+...=\frac{2^5-1}{1...6}B_3\pi^6=\frac{31\pi^6}{30240},\\ .....,\\ 1-\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}-\frac{1}{4^{2n}}+...=\frac{2^{2n-1}-1}{1.2...2n}B_n\pi^{2n},\end{cases}$$

и

$$(4)\quad\begin{cases}1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...=\frac{\pi}{4},\\ 1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+...=\frac{C_1}{1.2}\frac{\pi^3}{2^3}=\frac{\pi^3}{32},\\ 1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+..=\frac{C_2}{1.2.3.4}\frac{\pi^5}{2^6}=\frac{5\pi^5}{1536},\\ .....,\\ 1-\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{5^{2n+1}}-\frac{1}{7^{2n+1}}+...=\frac{C_n}{1.2...2n}\frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+2}}.\end{cases}$$

Слѣдуетъ замѣтить, что формулы (3) могутъ быть выведены изъ формулъ n° 193 и что первую изъ формулъ (4) мы уже встрѣтили въ n° 191.

О круговыхъ функціяхъ мнимыхъ перемѣнныхъ.

196. Разложенія, которыя мы вывели въ предыдущихъ параграфахъ, даютъ намъ возможность разсматривать круговыя функціи съ точки зрѣнія гораздо болѣе общей, чѣмъ та, съ какой мы до сихъ поръ

ихъ разсматривали. Дѣйствительно, мы видимъ, что если мы будемъ опредѣлять функціи $sinz$ и $cosz$ при посредствѣ равенствъ

$$(1)\qquad \begin{cases} sinz = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \cdots, \\ cosz = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \cdots, \end{cases}$$

то можемъ давать перемѣнной z мнимыя значенія, такъ какъ ряды, заключающіеся въ предыдущихъ формулахъ, остаются сходящимися, когда z обозначаетъ мнимое выраженіе. Дѣйствительно, рядъ, члены котораго мнимы, называется *сходящимся*, если оба ряда, членами одного изъ которыхъ служатъ вещественныя части членовъ даннаго ряда, а членами другаго—коэффиціенты при i членовъ даннаго же ряда, сходящіеся. Но положивъ

$$z = \rho(cos\omega + i sin\omega),$$

найдемъ

$$sinz = \left(\frac{\rho cos\omega}{1} - \frac{\rho^3 cos3\omega}{1.2.3} + \cdots\right) + i\left(\frac{\rho sin\omega}{1} - \frac{\rho^3 sin3\omega}{1.2.3} + \cdots\right),$$

$$cosz = \left(1 - \frac{\rho^2 cos2\omega}{1.2} + \frac{\rho^4 cos4\omega}{1.2.3.4} - \cdots\right) + i\left(-\frac{\rho^2 sin2\omega}{1.2} + \frac{\rho^4 sin4\omega}{1.2.3.4} - \cdots\right),$$

и такъ какъ ряды

$$\frac{\rho}{1} + \frac{\rho^3}{1.2.3} + \cdots, \quad 1 + \frac{\rho^2}{1.2} + \frac{\rho^4}{1.2.3.4} + \cdots$$

сходящіеся, каково бы ни было положительное число ρ, то, слѣдовательно, и подавно, на основаніи извѣстной теоремы, будутъ сходящіеся и ряды, входящіе въ предыдущія выраженія $sinz$ и $cosz$.

Функціи $tangz$, $cotz$, $secz$, $cosecz$ могутъ быть разложены въ сходящіеся ряды, расположенные по восходящимъ степенямъ z, въ очень ограниченномъ промежуткѣ, когда z число вещественное, а потому этими разложеніями нельзя воспользоваться для общаго опредѣленія функцій, къ которымъ онѣ относятся; но вполнѣ естественно опредѣлить послѣднія функціи при посредствѣ равенствъ

$$tangz = \frac{sinz}{cosz}, \quad cotz = \frac{cosz}{sinz},$$

$$secz = \frac{1}{cosz}, \quad cosecz = \frac{1}{sinz}.$$

Отсюда заключаемъ, что отношенія $\frac{sinz}{z}$ и $\frac{tangz}{z}$ стремятся къ единицѣ, когда мнимая перемѣнная z стремится къ нулю.

197. Съ этой новой точки зрѣнія прямыя круговыя функціи имѣютъ замѣчательную связь съ функціями, которыя называются *показательными*; постараемся это установить.

Обозначимъ чрезъ z вещественную или мнимую перемѣнную и положимъ

$$\varphi(z) = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \cdots;$$

рядъ правой части будетъ, очевидно, сходящимся при всякомъ вещественномъ или мнимомъ значеніи z; замѣняя z чрезъ z_1, получимъ

$$\varphi(z_1) = 1 + \frac{z_1}{1} + \frac{z_1^2}{1.2} + \frac{z_1^3}{1.2.3} + \frac{z_1^4}{1.2.3.4} + \cdots.$$

Такъ какъ оба ряда абсолютно сходящіеся, то перемножая ихъ и соединяя въ одинъ члены одного измѣренія относительно z и z_1, получимъ, согласно извѣстной теоремѣ, новый сходящійся рядъ, сумма котораго будетъ равна $\varphi(z)\varphi(z_1)$. Составивъ это произведеніе, найдемъ, что членъ измѣренія n относительно z и z_1 будетъ

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\left[z^n + \frac{n}{1}z^{n-1}z_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}z^{n-2}z_1^2 + \cdots + z_1^n\right]$$

или

$$\frac{(z+z_1)^n}{1.2.3\ldots n};$$

слѣдовательно, будемъ имѣть

$$\varphi(z)\varphi(z_1) = \varphi(z+z_1),$$

и, поэтому,

$$\varphi(z)\varphi(z_1)\varphi(z_2)\ldots\varphi(z_{\mu-1}) = \varphi(z+z_1+z_2+\cdots+z_{\mu-1}),$$

каковы бы ни были μ чиселъ z, z_1,.... Если эти числа равны между собою, то предыдущая формула приводится къ слѣдующей

$$[\varphi(z)]^\mu = \varphi(\mu z);$$

слѣдовательно, если μ и ν будутъ два цѣлыхъ положительныхъ числа, то будемъ имѣть

$$\left[\varphi\left(\pm\frac{\mu}{\nu}\right)\right]^{\nu}=[\varphi(\pm 1)]^{\mu},$$

и, такъ какъ $\varphi(1)\,\varphi(-1)=\varphi(0)=1$, то

$$\left[\varphi\left(\pm\frac{\mu}{\nu}\right)\right]^{\nu}=[\varphi(1)]^{\pm\mu}.$$

Принято значеніе $\varphi(1)$ обозначать чрезъ e; такимъ образомъ

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots;$$

рядъ, при посредствѣ котораго число e опредѣляется, быстро сходящійся, и, если положимъ

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n}+R_n,$$

то R_n будетъ погрѣшностью, которую мы сдѣлаемъ, остановившись на членѣ $\frac{1}{1.2\ldots n}$. Очевидно, будемъ имѣть

$$R_n=\frac{1}{1.2\ldots n}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots\right],$$

и, слѣдовательно,

$$R_n<\frac{1}{1.2\ldots n}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\ldots\right],$$

или

$$R_n<\frac{1}{1.2\ldots n}\times\frac{1}{n};$$

слѣдовательно, если при вычисленіи e мы пренебрежемъ всѣми членами, слѣдующими за $(n+1)$-ымъ, то сдѣланная погрѣшность будетъ меньше n-ой части этого члена; такимъ образомъ найдемъ

$$e=2{,}71828\ 18284\ 59045\ldots.$$

Принимая во вниманіе предыдущее, мы можемъ написать

$$\left[\varphi\left(\pm\frac{\mu}{\nu}\right)\right]^{\nu}=e^{\pm\mu};$$

но число $\varphi\left(\frac{\mu}{\nu}\right)$ очевидно положительное, а такъ какъ

$$\varphi\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\varphi\left(-\frac{\mu}{\nu}\right)=\varphi(0)=1,$$

то, слѣдовательно, и $\varphi\left(-\frac{\mu}{\nu}\right)$ число положительное; отсюда заключаемъ, что если z число вещественное, то количество $\varphi(z)$ будетъ равно тому изъ значеній выраженія e^z, которое вещественное и положительное.

Этотъ результатъ приводитъ насъ, естественно, къ тому, чтобы обозначать чрезъ e^z, каково бы ни было z, сумму сходящагося ряда $1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\ldots$; такимъ образомъ суммированіе этого ряда равносильно возвышенію числа e въ степень z; и послѣ только что установленнаго нами предложенія, основное свойство функціи e^z выражается при посредствѣ формулы

$$e^z.e^{z_1}=e^{z+z_1}, \tag{2}$$

которая справедлива, каковы бы ни были числа z и z_1.

Если мы будемъ всегда $\sqrt{-1}$ обозначать чрезъ i и замѣнимъ въ уравненіи

$$e^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots \tag{3}$$

z послѣдовательно чрезъ $+iz$ и чрезъ $-iz$, то получимъ

$$e^{iz}=\left(1-\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^4}{1.2.3.4}-\ldots\right)+i\left(\frac{z}{1}-\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{z^5}{1\ldots5}-\ldots\right),$$

$$e^{-iz}=\left(1-\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^4}{1.2.3.4}-\ldots\right)-i\left(\frac{z}{1}-\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{z^5}{1\ldots5}-\ldots\right),$$

то есть, на основаніи равенствъ (1),

$$\left\{\begin{array}{l} e^{iz}=\cos z+i\sin z,\\ e^{-iz}=\cos z-i\sin z; \end{array}\right. \tag{4}$$

отсюда находимъ

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\quad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}. \tag{5}$$

Если въ основной формулѣ (2) замѣнимъ z и z_1 сперва чрезъ iz и iz_1, а затѣмъ чрезъ $-iz$ и $-iz_1$, то будемъ имѣть

$$e^{iz}\,.\,e^{iz_1}=e^{i(z+z_1)},\quad e^{-iz}\,.\,e^{-iz_1}=e^{-i(z+z_1)},$$

и, на основаніи формулъ (4),

$$(\cos z+i\sin z)(\cos z_1+i\sin z_1)=\cos(z+z_1)+i\sin(z+z_1),$$
$$(\cos z-i\sin z)(\cos z_1-i\sin z_1)=\cos(z+z_1)-i\sin(z+z_1);$$

складывая и затѣмъ вычитая одно изъ другого эти два равенства и выполняя указанныя умноженія, получимъ формулы

$$(6)\quad \begin{cases} \cos(z+z_1)=\cos z\cos z_1-\sin z\sin z_1, \\ \sin(z+z_1)=\sin z\cos z_1+\cos z\sin z_1, \end{cases}$$

которыя справедливы, каковы бы ни были количества вещественныя или мнимыя, обозначаемыя чрезъ z и z_1. Отсюда слѣдуетъ, что всѣ формулы общей тригонометріи, которыя мы вывели изъ формулъ, относящихся къ сложенію дугъ, будутъ существовать безъ всякаго измѣненія, когда значенія дугъ будутъ мнимыя.

Если въ формулахъ (2) и (6) замѣнимъ z чрезъ x и z_1 чрезъ iy, то получимъ

$$e^{x+iy}=e^x\,.\,e^{iy},$$
$$\cos(x+iy)=\cos x\cos iy-\sin x\sin iy,$$
$$\sin(x+iy)=\sin x\cos iy+\cos x\sin iy;$$

но формулы (4) и (5) примутъ видъ

$$(7)\quad e^{iy}=\cos y+i\sin y,\ \cos iy=\frac{e^y-e^{-y}}{2},\ \sin iy=i\,\frac{e^y-e^{-y}}{2};$$

слѣдовательно, будемъ имѣть

$$(8)\quad \begin{cases} e^{x+iy}=e^x\cos y+ie^x\sin y, \\ \cos(x+iy)=\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}\cos x-i\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}\sin x, \\ \sin(x+iy)=\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}\sin x+i\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}\cos x. \end{cases}$$

Эти формулы справедливы, каковы бы ни были значенія x и y вещественныя или мнимыя; но онѣ въ особенности будутъ полезны для приведенія къ обыкновенному виду мнимыхъ выраженій функцій e^z, $\cos z$ и $\sin z$, въ которыхъ z обозначаетъ мнимое выраженіе $x+iy$.

Имѣемъ еще, каковы бы ни были x и y,

$$\tan g(x+iy)=\frac{\sin(x+iy)}{\cos(x+iy)}=\frac{2\sin(x+iy)\cos(x-iy)}{2\cos(x+iy)\cos(x-iy)}$$
$$=\frac{\sin 2x+\sin 2iy}{\cos 2x+\cos 2iy}$$

и, на основаніи формулъ (7),

$$(9)\quad \tan g(x+iy)=\frac{2\sin 2x+i(e^{2y}-e^{-2y})}{2\cos 2x+(e^{2y}+e^{-2y})}.$$

Въ случаѣ, когда $x=0$, эта послѣдняя формула принимаетъ слѣдующій видъ

$$(10)\quad \tan g iy=i\,\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}.$$

198. Показательная функція e^z обладаетъ однимъ замѣчательнымъ свойствомъ, которое можетъ быть выражено въ слѣдующей теоремѣ:

Теорема.—*Если обозначимъ чрезъ z данное число вещественное или мнимое и чрезъ m цѣлое положительное число, то будемъ имѣть*

$$e^z=\lim\left(1+\frac{z}{m}\right)^m \text{ для } m=\infty.$$

Чтобы доказать эту теорему, разложимъ при посредствѣ формулы бинома, относящейся къ показателю цѣлому и положительному, выраженіе $\left(1+\frac{z}{m}\right)^m$; обозначивъ чрезъ n цѣлое число, меньшее m, но такое, которое можно предположить произвольно большимъ, получимъ

$$(1)\quad \begin{cases} \left(1+\dfrac{z}{m}\right)=1+\dfrac{z}{1}+\left(1-\dfrac{1}{m}\right)\dfrac{z^2}{1.2}+\dots \\ \qquad +\left(1-\dfrac{1}{m}\right)\left(1-\dfrac{2}{m}\right)\dots\left(1-\dfrac{n-1}{m}\right)\dfrac{z^n}{1.2\dots n}+R_n; \end{cases}$$

R_n обозначаетъ сумму членовъ, въ ограниченномъ числѣ, которые слѣдуютъ за $(n+1)$-ымъ, а именно

$$R_n=\left(1-\frac{1}{m}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\frac{z^n}{1\,.\,2\dots n}$$
$$\times\left[\frac{1-\frac{n}{m}}{n+1}z+\frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)\left(1-\frac{n+1}{m}\right)}{(n+1)(n+2)}z^2+\dots\right].$$

Мы знаемъ, что модуль произведенія равенъ произведенію модулей сомножителей и что модуль суммы не можетъ быть больше суммы модулей частей (n° 162); слѣдовательно, модуль R_n не можетъ быть больше значенія, которое принимаетъ правая часть предыдущей формулы, когда въ ней замѣнимъ z чрезъ его модуль ρ. Но это значеніе, которое является суммою ограниченнаго числа членовъ, очевидно меньше модуля произведенія $\left(1-\frac{1}{m}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\frac{z^n}{1.2\dots n}$ на сумму безконечной геометрической прогрессіи

$$\frac{\rho}{n+1}+\left(\frac{\rho}{n+1}\right)^2+\dots,$$

каковая сумма равна $\frac{\rho}{n+1-\rho}$, если положимъ $n+1>\rho$.

Такъ какъ модуль R_n меньше модуля выраженія

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\frac{z^n}{1.2\dots n}\left(\frac{\rho}{n+1-\rho}\right),$$

то, обозначая чрезъ θ нѣкоторое мнимое выраженіе, котораго модуль меньше единицы, будемъ имѣть

$$(2)\qquad R_n=\left(1-\frac{1}{m}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\frac{z^n}{1.2\dots n}\left(\frac{\theta\rho}{n+1-\rho}\right).$$

Предположимъ теперь, что число n не измѣняется, а цѣлое число m безконечно возрастаетъ; формулы (1) и (2), если въ нихъ примемъ $m=\infty$, дадутъ

$$(3)\qquad lim\left(1+\frac{z}{m}\right)^m=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\dots+\frac{z^n}{1.2\dots n}+R'_n,$$

$$(4)\qquad R'_n=\frac{z^n}{1.2\dots n}\frac{\theta'\rho}{n+1-\rho},$$

гдѣ θ' обозначаетъ число, модуль котораго не превосходитъ 1. Равенство (3) справедливо, какъ велико бы ни было n; если будемъ увеличивать это число до безконечности, то изъ формулы (4) мы видимъ, что R'_n будетъ стремиться къ нулю и формула (3) дастъ

$$lim\left(1+\frac{z}{m}\right)^m=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\dots,$$

то есть

$$lim\left(1+\frac{z}{m}\right)^m=e^z.$$

Замѣчаніе.—Теорема, которую мы только что доказали, можетъ быть обобщена и формулирована такъ:

Если m обозначаетъ цѣлое положительное число и если z будетъ мнимой перемѣнной функціей m, стремящейся къ предѣлу z_0, когда m стремится къ безконечности, то будемъ имѣть

$$lim\left(1+\frac{z}{m}\right)^m=e^{z_0}\quad\text{для}\quad m=\infty.$$

Въ самомъ дѣлѣ, равенства (1) и (2) будутъ справедливы и для того случая, когда z зависитъ отъ m. Если въ нихъ примемъ $m=\infty$ и обозначимъ чрезъ ρ_0 модуль z_0, т. е. предѣлъ ρ, то будемъ имѣть

$$lim\left(1+\frac{z}{m}\right)^m=1+\frac{z_0}{1}+\frac{z_0^2}{1.2}+\dots+\frac{z_0^n}{1.2\dots n}+R''_n,$$

$$R''_n=\frac{z_0^n}{1.2\dots n}\frac{\theta''\rho_0}{n+1-\rho_0},$$

гдѣ θ'' постоянно обозначаетъ выраженіе вещественное или мнимое, котораго модуль меньше 1; если n будетъ стремиться къ безконечности, то получимъ

$$lim\left(1+\frac{z}{m}\right)^m=e^{z_0}.$$

199. Аналогія, которая существуетъ между прямыми круговыми функціями и показательными, естественно будетъ существовать и между обратными круговыми функціями и логариѳмами.

Неперовымъ логариѳмомъ мнимаго выраженія $z=\rho(\cos\omega+i\sin\omega)$ называютъ показателя степени, въ которую надо возвысить число e для того, чтобы получить $\rho(\cos\omega+i\sin\omega)$. Чтобы найти подобный логариѳмъ, слѣдуетъ найти вещественныя значенія x и y, удовлетворяющія равенству

$$e^{x+iy}=\rho(\cos\omega+i\sin\omega),$$

или

$$e^x(\cos y+i\sin y)=\rho(\cos\omega+i\sin\omega).$$

Изъ этого равенства вытекаютъ два слѣдующія

$$e^x \cos y = \rho \cos\omega, \quad e^x \sin y = \rho \sin\omega,$$

откуда получаемъ

$$e^x = \rho, \quad \cos y = \cos\omega, \quad \sin y = \sin\omega,$$

и, слѣдовательно,

$$x = l\rho, \quad y = \omega + 2k\pi,$$

гдѣ k неопредѣленное цѣлое число. Такимъ образомъ выраженіе

$$\rho(\cos\omega + i\sin\omega)$$

имѣетъ безчисленное множество неперовыхъ логариѳмовъ, которые всѣ даны при посредствѣ формулы

$$l[\rho(\cos\omega + i\sin\omega)] = l\rho + (\omega + 2k\pi)i;$$

въ частныхъ случаяхъ, для $\omega = 0$ и для $\omega = \pi$, имѣемъ

$$l(\rho) = l\rho + 2k\pi i, \quad l(-\rho) = l\rho + (2k+1)\pi i;$$

знакъ $l(\rho)$ здѣсь служитъ для обозначенія всѣхъ вмѣстѣ взятыхъ логариѳмовъ ρ, тогда какъ $l\rho$ служитъ для обозначенія только того изъ этихъ логариѳмовъ, который вещественный.

Когда z обозначаетъ мнимое выраженіе, то

$$arc\sin z, \quad arc\cos z, \quad arc\,tang\, z, \quad arc\cot z, \ldots$$

представляютъ мнимыя выраженія, которыхъ синусъ, или косинусъ, или тангенсъ, и т. д. равенъ z; эти выраженія могутъ принимать безконечное число значеній какъ въ случаѣ, когда z мнимое, такъ и въ случаѣ, когда z вещественное; чтобы мы могли принимать ихъ какъ функціи z, необходимо прибавить нѣкоторыя условія къ ихъ опредѣленію. Но мы не можемъ входить въ подробности, которыя относятся къ этому вопросу, такъ какъ выйдемъ изъ опредѣленныхъ нами рамокъ, почему отсылаемъ читателя къ сочиненіямъ, въ которыхъ Коши занимался этимъ вопросомъ. Мы здѣсь ограничимся указаніемъ способа, при помощи котораго опредѣляются значенія выраженій $arc\cos z$, $arc\cos z, \ldots$, когда z имѣетъ мнимое значеніе $\alpha + i\beta$. Разсмотримъ, напримѣръ, выраженіе $arc\cos(\alpha + i\beta)$; если положимъ

$$x + iy = arc\cos(\alpha + i\beta),$$

то получимъ

$$\alpha + i\beta = \cos(x + iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}\cos x - i\frac{e^y - e^{-y}}{2}\sin x;$$

слѣдовательно, имѣемъ

$$(1) \qquad \frac{e^y + e^{-y}}{2}\cos x = \alpha, \quad \frac{e^y - e^{-y}}{2}\sin x = -\beta,$$

откуда

$$(2) \qquad e^y = \frac{\alpha}{\cos x} - \frac{\beta}{\sin x}, \quad e^{-y} = \frac{\alpha}{\cos x} + \frac{\beta}{\sin x},$$

и, перемножая,

$$\frac{\alpha^2}{\cos^2 x} - \frac{\beta^2}{\sin^2 x} = 1,$$

или

$$\sin^4 x - (1 - \alpha^2 - \beta^2)\sin^2 x - \beta^2 = 0.$$

Отсюда, замѣтивъ, что $\sin^2 x$ число положительное, получаемъ

$$\sin^2 x = \frac{1 - \alpha^2 - \beta^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 - \alpha^2 - \beta^2}{2}\right)^2 + \beta^2},$$

затѣмъ

$$\cos^2 x = \frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2}$$

$$= \frac{\alpha^2}{\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2}};$$

извлекая квадратный корень изъ обѣихъ частей и замѣтивъ, что $\cos x$ долженъ имѣть тотъ же знакъ, что и α, получимъ

$$(3) \qquad \cos x = \frac{\alpha}{\left[\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2}\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Если для краткости примемъ

$$x_0 = arc\cos \frac{\alpha}{\left[\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2}\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$y_0 = l\left(\frac{\alpha}{\cos x_0} - \frac{\beta}{\sin x_0}\right),$$

то равенства (2) и (3) дадутъ

$$x=2k\pi\pm x_0, \quad y=\pm y_0,$$

гдѣ верхніе или нижніе знаки должны быть взяты соотвѣтственно и гдѣ k обозначаетъ неопредѣленное цѣлое число; отсюда слѣдуетъ, что

$$arc\,cos(\alpha+i\beta)=2k\pi\pm(x_0+iy_0).$$

Въ частномъ случаѣ, когда $\beta=0$, равенства (1) даютъ непосредственно $sin x=0$ или $y=0$. Если примемъ $y=0$, то получимъ $cos x=\alpha$, и это рѣшеніе возможно только въ случаѣ, когда α заключается между -1 и $+1$. Полагая $sin x=0$, будемъ имѣть $cos x=\pm 1$, при чемъ знакъ въ правой части будетъ тотъ же, что и при α; тогда первое равенство (1) даетъ

$$e^y+e^{-y}=\pm 2\alpha,$$

откуда

$$e^y=\pm\alpha+\sqrt{\alpha^2-1} \quad \text{и} \quad y=l(\pm\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}).$$

Слѣдовательно, если α заключается между $-\infty$ и -1, имѣемъ

$$arc\,cos\,\alpha=(2k+1)\pi+il(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}),$$

и, если α заключается между $+1$ и $+\infty$,

$$arc\,cos\,\alpha=2k\pi+il(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}),$$

гдѣ k всегда обозначаетъ цѣлое число положительное, отрицательное, нуль.

О гиперболическихъ косинусахъ и синусахъ.

200. Тригонометрическія таблицы даютъ средство вычислить $cos x$ и $sin x$, какова бы ни была вещественная дуга x; и если бы имѣли другія таблицы, дающія значенія $cos ix$ и $sin ix$ для всѣхъ вещественныхъ значеній x, то легко мы могли бы получить при посредствѣ формулъ, относящихся къ сложенію дугъ, косинусъ и синусъ какого угодно мнимаго выраженія $x+iy$. Таблицы такія дѣйствительно были составлены; но составители ихъ, желая избѣжать употребленія мнимыхъ чиселъ, сочли необходимымъ ввести новое обозначеніе, о которомъ мы здѣсь скажемъ.

Когда перемѣнная x вещественна, то функціи $cos ix$ и $\frac{sin ix}{i}$ тоже вещественны; первая изъ нихъ называется *гипорболическимъ косинусомъ*, а вторая гиперболическимъ синусомъ x. Гиперболическій косинусъ и гиперболическій синусъ можемъ обозначать при посредствѣ характеристикъ $cos\,hyp$, $sin\,hyp$, поставленныхъ впереди перемѣнной; тогда будемъ имѣть

$$cos\,hyp\,x=cos\,ix, \quad sin\,hyp\,x=\frac{sin\,ix}{i},$$

или

$$cos\,hyp\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad sin\,hyp\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Гиперболическій косинусъ и гиперболическій синусъ перемѣнной x связаны между собою соотношеніемъ

$$cos\,hyp^2\,x-sin\,hyp^2\,x=1.$$

Частныя $\frac{sin\,hyp\,x}{cos\,hyp\,x}$ и $\frac{cos\,hyp\,x}{sin\,hyp\,x}$ называются *гиперболическимъ тангенсомъ* и *гиперболическимъ котангенсомъ* x и будемъ имѣть

$$tang\,hyp\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, \quad cot\,hyp\,x\,\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

Наконецъ, когда положимъ $cos\,hyp\,x=y$ или $sin\,hyp\,x=y$, или и т. д., то также пишемъ $x=arc\,cos\,hyp\,y$, или $x=arc\,sin\,hyp\,y$, или и т. д., послѣ этого имѣемъ

$$arc\,cos\,hyp\,x=l(x\pm\sqrt{x^2-1}),$$
$$arc\,sin\,hyp\,x=l(x\pm\sqrt{x^2+1}),$$
$$arc\,tang\,hyp\,x=\tfrac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x}.$$

Чтобы оправдать обозначенія, которыми мы пользуемся, необходимо прибѣгнуть къ дифференціальному исчисленію *).

*) Если отнесемъ кругъ, радіусъ котораго принятъ за единицу, къ двумъ прямоугольнымъ координатамъ, изъ которыхъ одна, а именно абсцисса, проходитъ чрезъ начало дугъ, то абсцисса и ордината точки M на окружности будутъ косинусомъ и синусомъ дуги, заключающейся между осью абсциссъ и точкою M, или же, что одно и тоже, косинусомъ и синусомъ удвоенной площади сектора, соотвѣтствующаго дугѣ, о которой говорится. Точно также, если отнесемъ къ этимъ осямъ равностороннюю гиперболу, полуось которой принята за единицу, то абсцисса и ордината точки M этой кри-

Первыми таблицами гиперболическихъ касинусовъ и синусовъ мы обязаны Ламберту (Lambert); онѣ вышли въ свѣтъ въ Берлинѣ въ 1770 г.; въ послѣдніе годы Гудерманнъ (Gudermann) издалъ другія болѣе обширныя и которыя слѣдуетъ предпочесть таблицамъ Ламберта.

Разложенія функцій $log(1+z)$ *и* $arctang\, z$ *въ ряды по восходящимъ степенямъ* z

201. Способъ, которымъ мы намѣрены воспользоваться для разложенія въ ряды функціи $log(1+z)$ и $arctang\, z$, предполагаетъ формулу двучлена для дробнаго показателя. Для полноты изложенія теоріи, разсматриваемой въ этой главѣ, мы начнемъ съ вывода этой формулы.

Формула бинома. — Обозначимъ чрезъ n какое нибудь вещественное число, а чрезъ z вещественное или мнимое число, модуль котораго меньше 1; рядъ

$$1+\frac{n}{1}z+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}z^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}z^3+\ldots$$

вой будутъ гиперболическимъ косинусомъ и гиперболическимъ синусомъ удвоенной площади сектора, заключающагося между осью абсциссъ и радіусомъ, соединяющимъ точку M съ центромъ кривой.

Въ самомъ дѣлѣ, если примемъ за единицу полуось равносторонней гиперболы, то абсцисса ξ, по предположенію положительная, и ордината η будутъ удовлетворять уравненію $\xi^2-\eta^2=1$; такимъ образомъ ξ и η будутъ обязательно гиперболическимъ косинусомъ и гиперболическимъ синусомъ нѣкоторой перемѣнной x. Слѣдовательно, можемъ положить

$$\xi=cos\,hyp\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \eta=sin\,hyp\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2};$$

откуда выводимъ, пользуясь дифференціальнымъ исчисленіемъ

$$d\xi=\eta dx,\quad d\eta=\xi dx,$$

откуда

$$\xi d\eta-\eta d\xi=(\xi^2-\eta^2)dx,$$

или

$$dx=\xi d\eta-\eta d\xi.$$

Отсюда мы видимъ, что x дѣйствительно будетъ удвоенною площадью сектора, заключающагося между осью положительныхъ абсциссъ и радіусомъ, который соединяетъ центръ кривой съ точкой, которой координаты будутъ ξ и η.

будетъ сумма, состоящая изъ конечнаго числа членовъ, если n цѣлое положительное число; во всякомъ другомъ случаѣ онъ будетъ состоять изъ неограниченнаго числа членовъ, но онъ всегда будетъ сходящимся, потому что модуль z меньше 1 (по предположенію), и, слѣдовательно, модуль отношенія $\frac{n-\mu+1}{\mu}z$ $(\mu+1)$-аго члена ряда къ μ-ому члену останется меньше нѣкотораго числа, которое само меньше 1 для всѣхъ значеній μ, большихъ нѣкотораго предѣла.

Послѣ этого, если будемъ разматривать z какъ постоянное число, а n какъ перемѣнное, то, обозначивъ чрезъ $\varphi(n)$ сумму ряда, получимъ

$$\varphi(n)=1+\frac{n}{1}z+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}z^2+\ldots,$$

и, замѣнивъ n чрезъ n_1,

$$\varphi(n_1)=1+\frac{n_1}{1}z+\frac{n_1(n_1-1)}{1\,.\,2}z^2+\ldots.$$

Если $\varphi(n)$ умножимъ на $\varphi(n_1)$ и расположимъ произведеніе по степенямъ z, то найдемъ, воспользовавшись формулою (1) n°180, что коэффиціентъ при z^μ будетъ

$$\frac{(n+n_1)(n+n_1-1)\ldots(n+n_1-\mu+1)}{1.2\ldots\mu};$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\varphi(n)\varphi(n_1)=\varphi(n+n_1),$$

и, слѣдовательно,

$$\varphi(n)\varphi(n_1)\varphi(n_2)\ldots\varphi(n_{\mu-1})=\varphi(n+n_1+n_2+\ldots+n_{\mu-1}),$$

гдѣ n, n_1, n_2,$\ldots n_{\mu-1}$ произвольныя числа. Если предположимъ, что эти числа равны между собою, то получимъ

$$[\varphi(n)]^\mu=\varphi(\mu n).$$

Отсюда слѣдуетъ, что если μ и ν суть два цѣлыя положительныя числа, то будемъ имѣть

$$\left[\varphi\left(\pm\frac{\mu}{\nu}\right)\right]^\nu=[\varphi(\pm 1)]^\mu,$$

такъ какъ каждая часть этой формулы равна, на основаніи предыдущаго, $\varphi(\pm\mu)$. Но имѣемъ

$$\varphi(+1)=1+z,$$
$$\varphi(-1)=1-z+z^2-z^3+\ldots=\frac{1}{1+z}=(1+z)^{-1};$$

слѣдовательно,

$$\left[\varphi\left(\pm\frac{\mu}{\nu}\right)\right]^{\nu}=(1+z)^{\pm\mu};$$

слѣдовательно, число $\varphi\left(\pm\frac{\mu}{\nu}\right)$ есть одно изъ значеній выраженія $(1+z)^{\pm\frac{\mu}{\nu}}$, и, имѣя именно это въ виду, можемъ написать

$$\varphi\left(\pm\frac{\mu}{\nu}\right)=(1+z)^{\pm\frac{\mu}{\nu}}.$$

202. Разложеніе функціи $log(1+z)$. — Обозначимъ чрезъ z вещественную или мнимую перемѣнную, модуль которой меньше 1; на основаніи предыдущаго, если m обозначаетъ цѣлое положительное число, рядъ

$$1+\frac{1}{m}z+\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\frac{z^2}{1.2}+\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots$$

будетъ сходящимся и m-ая его степень равна $1+z$. Слѣдовательно, если обозначимъ чрезъ $1+\frac{u}{m}$ сумму ряда, то будемъ имѣть

$$\left(1+\frac{u}{m}\right)^m=1+z \tag{1}$$

и

$$u=\frac{z}{1}-\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{z^2}{2}+\ldots$$
$$+(-1)^{n-1}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{2m}\right)\ldots\left[1-\frac{1}{(n-1)m}\right]\frac{z^n}{n}+R_n;$$

R_n будетъ остаткомъ ряда:

$$R_n=(-1)^n\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{nm}\right)\frac{z^{n+1}}{n+1}$$
$$\times\left[1-\frac{n+1-\frac{1}{m}}{n+2}z+\frac{\left(n+1-\frac{1}{m}\right)\left(n+2-\frac{1}{m}\right)}{(n+2)(n+3)}z^2+\ldots\right].$$

Числовые коэффиціенты суммы, заключенной въ скобкахъ, всѣ меньше 1, слѣдовательно, если обозначимъ чрезъ ρ модуль z, то модуль суммы, о которой мы говоримъ, будетъ меньше $1+\rho+\rho^2+\ldots\ldots$, т. е. меньше

$\frac{1}{1-\rho}$; сама сумма можетъ быть выражена чрезъ $\frac{\theta}{1-\rho}$, гдѣ θ обозначаетъ мнимое выраженіе, модуль котораго меньше 1. На основаніи этого выраженіе u будетъ

$$\left\{\begin{aligned} u&=\frac{z}{1}-\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{z^2}{2}+\ldots\\ &+(-1)^{n-1}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{2m}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(n-1)m}\right)\frac{z^n}{n}\\ &+(-1)^n\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{2m}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{nm}\right)\frac{z^{n+1}}{n+1}\frac{\theta}{1-\rho}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Если цѣлое число m будетъ стремиться къ безконечности и если обозначимъ чрезъ u_0 предѣлъ u, то равенство (1), на основаніи теоремы, доказанной въ n° 198, дастъ сперва

$$e^{u_0}=1+z, \tag{3}$$

и затѣмъ, на основаніи равенства (2), будемъ имѣть

$$u_0=\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\ldots-(-1)^n\frac{z^n}{n}+(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}\frac{\theta'}{1-\rho}, \tag{4}$$

гдѣ θ' обозначаетъ мнимое выраженіе, модуль котораго меньше 1. Наконецъ, такъ какъ $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ стремится къ нулю, когда n стремится къ безконечности, то будемъ имѣть въ предѣлѣ, для $n=\infty$,

$$u_0=\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\ldots. \tag{5}$$

На основаніи формулы (3) количество u_0 выражаетъ одинъ изъ неперовыхъ логариѳмовъ $1+z$ и мы можемъ написать

$$l(1+z)=\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots. \tag{6}$$

Положительное количество имѣетъ только одинъ логариѳмъ вещественный; поэтому, если z приводится къ вещественному количеству $\pm x$, заключающемуся между—1 и +1, то вещественными логариѳмами $1+x$ и $1-x$ будутъ

$$\left\{\begin{aligned} l(1+x)&=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots,\\ l(1-x)&=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

203. Вернемся къ формулѣ (6) и положимъ

$$(8)\qquad \begin{cases} z=\rho e^{i\omega}=\rho(\cos\omega+i\sin\omega), \\ 1+z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta). \end{cases}$$

Изъ этихъ двухъ уравненій получаемъ

$$r\cos\theta=1+\rho\cos\omega,\quad r\sin\theta=\rho\sin\omega,$$

затѣмъ

$$(9)\qquad r=+\sqrt{1+2\rho\cos\omega+\rho^2},$$

и

$$(10)\qquad \cos\theta=\frac{1+\rho\cos\omega}{r},\quad \sin\theta=\frac{\rho\sin\omega}{r},\quad \operatorname{tang}\theta=\frac{\rho\sin\omega}{1+\rho\cos\omega}.$$

Такъ какъ количества ρ и ω даны, то уравненіе (9) опредѣляетъ безъ двойственности модуль r; что же касается угла θ, то онъ также будетъ вполнѣ опредѣленъ при посредствѣ уравненій (10), если поставимъ условіе, что онъ заключается между предѣлами $-\pi$ и $+\pi$. Но такъ какъ модуль ρ количества z меньше 1, то мы видимъ изъ уравненій (10), что $\cos\theta$ всегда положительный и, слѣдовательно, уголъ θ будетъ заключаться между предѣлами $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$; слѣдовательно, этотъ уголъ опредѣлится безъ двойственности изъ третьяго уравненія (10), которое даетъ возможность опредѣлить его тангенсъ.

Послѣ этого, общее выраженіе неперовыхъ логариѳмовъ количества $1+z$ будетъ

$$l(1+z)=l(re^{i\theta})=lr+i(\theta+2k\pi).$$

гдѣ k цѣлое число; слѣдовательно, формула (6) дастъ, для подходящаго значенія k,

$$lr+i(\theta+2k\pi)=\frac{\rho e^{i\omega}}{1}-\frac{\rho^2e^{i\omega}}{2}+\frac{\rho^3e^{3i\omega}}{3}-\cdots.$$

Правая часть этого равенства обращается въ нуль при $\rho=0$; то же самое имѣемъ и относительно количествъ lr и θ; но эти послѣднія суть непрерывныя функціи количества ρ; слѣдовательно, цѣлое число k необходимо равно нулю и будемъ имѣть

$$(11)\qquad lr+i\theta=\frac{\rho e^{i\omega}}{1}-\frac{\rho^2e^{2i\omega}}{2}+\frac{\rho^3e^{3i\omega}}{3}-\cdots$$

Если отдѣльно приравняемъ вещественныя части и коэффиціенты при i и если одновременно замѣнимъ r и θ чрезъ ихъ значенія, полученныя изъ равенствъ (9) и (10), то получимъ

$$(12)\qquad l\sqrt{1+2\rho\cos\omega+\rho^2}=\frac{\rho\cos\omega}{1}-\frac{\rho^2\cos2\omega}{2}+\frac{\rho^3\cos3\omega}{3}-\cdots.$$

$$(13)\qquad \operatorname{arc\,tang}\frac{\rho\sin\omega}{1+\rho\cos\omega}=\frac{\rho\sin\omega}{1}-\frac{\rho^2\sin2\omega}{2}+\frac{\rho^3\sin3\omega}{3}-\cdots,$$

при чемъ слѣдуетъ помнить, что лѣвая часть равенства (13) должна быть взята между предѣлами $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$.

Если въ формулахъ (12) и (13) замѣнимъ ω чрезъ $\pi-\omega$, то получимъ

$$(14)\qquad l\sqrt{1-2\rho\cos\omega+\rho^2}=-\frac{\rho\cos\omega}{1}-\frac{\rho^2\cos2\omega}{2}-\frac{\rho^3\cos3\omega}{3}-\cdots,$$

$$(15)\qquad \operatorname{arc\,tang}\frac{\rho\sin\omega}{1-\rho\cos\omega}=\frac{\rho\sin\omega}{1}+\frac{\rho^2\sin2\omega}{2}+\frac{\rho^3\sin3\omega}{3}+\cdots.$$

Эти формулы (12), (13), (14) и (15) очень часто употребляются въ астрономіи и геодезіи.

Замѣчаніе.—Очень важно замѣтить, что формула (4) даетъ выраженіе остатка ряда, въ который разлагается $l(1+z)$. Напримѣръ, если въ этой формулѣ положимъ $n=0$, то получимъ

$$l(1+z)=\frac{\theta' z}{1-\rho}.$$

или, что одно и то же,

$$(16)\qquad l(1+z)=\theta'\frac{\rho}{1-\rho},$$

гдѣ θ' обозначаетъ выраженіе, модуль котораго меньше 1.

204. Разложеніе дуги въ рядъ, расположенный по степенямъ ея тангенса. — Ряды, заключающіеся въ формулахъ (13) и (15), сходящіеся, каково бы ни было ω, для всѣхъ значеній ρ, меньшихъ 1; если въ формулѣ (13) положимъ

$$\omega=\pm\frac{\pi}{2},\quad \rho\sin\omega=z,$$

то получимъ формулу

$$(17)\qquad \operatorname{arc\,tang}z=\frac{z}{1}-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}+\cdots,$$

которая будетъ справедлива для всѣхъ вещественныхъ значеній z,

заключающихся между —1 и +1. Лѣвая часть должна быть взята, какъ мы это видѣли, между предѣлами $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$ и тогда она непремѣнно будетъ заключаться между $-\frac{\pi}{4}$ и $+\frac{\pi}{4}$. Если положимъ

$$z=tang x,$$

то формула (17) преобразуется въ слѣдующую

$$(18) \qquad x=\frac{tang x}{1}-\frac{tang^3 x}{3}+\frac{tang^5 x}{5}-\ldots,$$

которая будетъ справедлива для всѣхъ значеній x, заключающихся между $-\frac{\pi}{4}$ и $+\frac{\pi}{4}$.

Точно также имѣемъ

$$arc\,tang z+arc\,tang\frac{1}{z}=\pm\frac{\pi}{2},$$

если только значеніе дуги z заключается между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$ и предъ правою частью взять знакъ количества z; на основаніи этого, замѣнивъ въ формулѣ (17) z чрезъ $\frac{1}{z}$, будемъ имѣть

$$(19) \qquad arc\,tang z=\pm\frac{\pi}{2}-\frac{1}{z}+\frac{1}{3z^3}-\frac{1}{5z^5}+\ldots.$$

Эта новая формула справедлива для всѣхъ значеній z, заключающихся между $-\infty$ и -1 или между $+1$ и $+\infty$; лѣвая часть всегда берется между предѣлами $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$. Полагая $z=tang x$, получимъ формулу

$$(20) \qquad x=\pm\frac{\pi}{2}-cot x+\frac{cot^3 x}{3}-\frac{cot^5 x}{5}+\ldots,$$

которая справедлива для значеній x, заключающихся между $-\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{4}$ или между $+\frac{\pi}{4}$ и $+\frac{\pi}{2}$.

Замѣчаніе.—Въ анализѣ, который привелъ насъ къ формулѣ (17), мы предполагали, что абсолютное значеніе z меньше 1; но такъ какъ рядъ правой части остается сходящимся для предѣльныхъ значеній ± 1, то формула будетъ справедлива и для этихъ значеній. Въ самомъ дѣлѣ, если предположимъ, что $\pm z$ стремится къ единицѣ, переходя чрезъ рядъ послѣдовательныхъ значеній, меньшихъ 1, то обѣ части формулы (17) будутъ другъ другу равны для всѣхъ этихъ значеній; кромѣ того каждая изъ нихъ стремится къ опредѣленному предѣлу, слѣдовательно, эти предѣлы непремѣнно равны между собою.

Вычисленіе отношенія окружности къ діаметру.

205. Полагая $x=\frac{\pi}{4}$ въ формулѣ (18) n° 204, получимъ

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots;$$

этотъ рядъ, который мы уже встрѣчали, весьма медленно сходящійся и онъ не можетъ служить для вычисленія π; для этой цѣли можно получить ряды быстро сходящіеся.

Положивъ, напримѣръ, согласно Эйлеру,

$$\frac{\pi}{4}=a+b$$

и

$$tang a=\frac{1}{2},$$

будемъ имѣть

$$tang b=\frac{tang\frac{\pi}{4}-tang a}{1+tang\frac{\pi}{4}tang a}=\frac{1}{3};$$

замѣняя a и b ихъ значеніями въ видѣ рядовъ, полученныхъ изъ формулы (17) n° 204, получимъ

$$\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\ldots\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}-\ldots\right).$$

Мы получимъ ряды быстрѣе сходящіеся, если введемъ дугу a, тангенсъ которой $\frac{1}{5}$, и поступимъ слѣдующимъ образомъ. Пусть

$$tang a=\frac{1}{5},$$

тогда будемъ имѣть

$$tang 2a=\frac{2\,tang a}{1-tang^2 a}=\frac{5}{12},$$

$$tang 4a=\frac{2\,tang 2a}{1-tang^2 2a}=\frac{120}{119},$$

Мы видимъ, что $4a$ мало разнится отъ $\frac{\pi}{4}$; если положимъ

$$\frac{\pi}{4}=4a-b,$$

то получимъ

$$tang\,b=\frac{tang\,4a-1}{1+tang\,4a}=\frac{1}{239};$$

слѣдовательно, замѣняя a и b ихъ значеніями, выраженными въ рядахъ, будемъ имѣть

$$\frac{\pi}{4}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\,.\,5^3}+\frac{1}{5\,.\,5^5}-\ldots\right)-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3\,.\,239^3}+\ldots\right).$$

При помощи этой формулы не трудно найти значеніе π съ точностью до 25 десятичныхъ знаковъ

$$\pi=3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 8\ldots.$$

Въ *Запискахъ Императорской Академіи Наукъ* Эйлеръ далъ большое число рядовъ того же рода, что и предыдущій; но мы ограничиваемся данными и отсылаемъ читателей, интересующихся этими разложеніями, къ только что упомянутому нами сочиненію.

Формулы, относящіяся къ вычисленію логариѳмовъ. Модуль обыкновенныхъ логариѳмовъ.

206. Формулы (7) n° 202, а именно

$$l(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots,$$
$$l(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots,$$

остаются въ силѣ для всѣхъ положительныхъ значеній x, меньшихъ 1; вычитая формулы одну изъ другой, получимъ

$$l\frac{1+x}{1-x}=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right).$$

Если въ первой формулѣ замѣнимъ x чрезъ $\frac{h}{N}$, а въ третьей чрезъ $\frac{h}{2N+h}$, то получимъ

$$(1)\quad\begin{cases} l(N+h)=lN+\left(\frac{h}{N}-\frac{h^2}{2N^2}+\frac{h^3}{3N^3}-\ldots\right), \\ l(N+h)=lN+2\left[\frac{h}{2N+h}+\frac{h^3}{3(2N+h)^3}+\frac{h^5}{5(2N+h)^5}+\ldots\right], \end{cases}$$

и, полагая $h=1$,

$$(2)\quad\begin{cases} l(N+1)=lN+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{2N^2}+\frac{1}{3N^3}-\ldots\right), \\ l(N+1)=lN+2\left[\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3(2N+1)^3}+\frac{1}{5(2N+1)^5}+\ldots\right]. \end{cases}$$

Эти формулы употребляются для вычисленія неперовыхъ логариѳмовъ; ряды, которые онѣ содержатъ, быстро сходящіеся, когда отношенія $\frac{h}{N}$ и $\frac{1}{N}$ малыя дроби.

Если формулы (1) умножимъ на модуль обыкновенныхъ логариѳмовъ M, то будемъ имѣть

$$(3)\quad\begin{cases} log(N+h)=log\,N+M\left(\frac{h}{N}-\frac{h^2}{2N^2}+\frac{h^3}{3N^3}-\ldots\right) \\ log(N+h)=log\,N+2M\left[\frac{h}{2N+h}+\frac{h^3}{3(2N+h)^3}\right. \\ \qquad\qquad\left.+\frac{h^5}{5(2N+h)^5}+\ldots\right]. \end{cases}$$

Для того чтобы было можно воспользоваться этими формулами (3), необходимо знать модуль M, выраженіе котораго извѣстно:

$$M=\frac{1}{l10},$$

и вычислить который легко при посредствѣ формулъ (1) или (2).

Въ самомъ дѣлѣ, вторая изъ формулъ (2) даетъ, если положимъ $N=1$,

$$(4)\qquad l2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\,.\,3^3}+\frac{1}{5\,.\,3^5}+\ldots\right);$$

затѣмъ вторая изъ формулъ (1) даетъ, если положимъ $N=8=2^3$ и $h=2$,

$$(5)\qquad l10=3l2+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\,.\,9^3}+\frac{1}{5\,.\,9^5}+\ldots\right),$$

слѣдовательно, будемъ имѣть

$$(6)\quad\frac{1}{M}=6\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\,.\,3^3}+\frac{1}{5\,.\,3^5}+\ldots\right)+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\,.\,9^3}+\frac{1}{5\,.\,9^5}+\ldots\right).$$

Ряды, входящіе въ эту формулу, достаточно сходящіеся; но можно получить безконечное число другихъ болѣе быстро сходящихся. Напримѣръ, если положимъ во второй формулѣ (1) $N=4096=2^{12}$, $h=4$, $N+h=4100$ и во второй формулѣ (2) $N=40=2^2\times 10$, то получимъ

$$l41+2l10=12l2+2\left(\frac{1}{2049}+\frac{1}{3\,.\,2049^3}+\cdots\right),$$

$$l41=l10+2l2+2\left(\frac{1}{81}+\frac{1}{3\,.\,81^3}+\frac{1}{5\,.\,81^5}+\cdots\right);$$

исключая $l2$ и $l41$ изъ этихъ двухъ равенствъ и равенства (5), найдемъ

$$(7)\quad \begin{cases} \frac{1}{M}=20\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\,.\,9^3}+\frac{1}{5\,.\,9^5}+\cdots\right) \\ \qquad +6\left(\frac{1}{81}+\frac{1}{3\,.\,81^3}+\frac{1}{5\,.\,81^5}+\cdots\right) \\ \qquad -6\left(\frac{1}{2049}+\frac{1}{3\,.\,2049^3}+\cdots\right). \end{cases}$$

Если вычислимъ каждый членъ формулы (6) или формулы (7) съ 28 десятичными знаками, такимъ образомъ, чтобы 25 изъ нихъ сохранились въ значеніяхъ $\frac{1}{M}$ и M, то найдемъ

$$(8)\quad \begin{cases} \frac{1}{M}=2{,}30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79914\ldots, \\ M=0{,}43429\ 44819\ 03251\ 82765\ 11289\ldots. \end{cases}$$

Если модуль будетъ опредѣленъ, то формулы (3) могутъ быть употреблены для вычисленія обыкновенныхъ логариѳмовъ; но мы по этому поводу отсылаемъ читателя къ введенію, помѣщенному въ логариѳмахъ Каллэта.

Разложенія функцій cosmx и sinmx въ ряды по восходящимъ степенямъ sinx.

207. Формулы (1) и (2) n° 181, гдѣ m обозначаетъ цѣлое число, даютъ значенія *cosma* и *sinma*, выраженныя при посредствѣ многочлена, расположеннаго по цѣлымъ и восходящимъ степенямъ *sina* или при посредствѣ произведенія, происшедшаго отъ перемноженія такого многочлена и *cosa*; формулы (1) относятся къ случаю, когда

m четное число, а фурмулы (2) къ случаю, когда m нечетное число. Правыя части формулы (1) будутъ безконечными рядами, если m перестаетъ быть числомъ четнымъ; то же самое имѣемъ и для правыхъ частей формулъ (2), когда m перестаетъ быть числомъ нечетнымъ, но легко убѣдиться, что эти ряды всегда будутъ сходящіеся. Кромѣ того, вычисленія, которыя мы выполнили при выводѣ формулъ, о которыхъ идетъ рѣчь, предположивъ, что въ однѣхъ m четное число, а въ другихъ m нечетное число, относятся точно также и къ тому случаю, когда предположимъ обратное, лишь бы только *cosa* былъ положителенъ, каковое условіе будетъ выполнено, если дуга a заключается между предѣлами $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$; единственная разница дѣйствительно состоитъ въ томъ, что въ случаѣ, разсмотрѣнномъ нами въ n° 181, мы разлагали только цѣлыя степени двучлена $1-sin^2a$, тогда какъ здѣсь показатели этихъ степеней будутъ имѣть знаменателемъ 2. Но каждая изъ этихъ степеней, какъ мы видѣли, можетъ быть разложена въ сходящійся рядъ, члены котораго слѣдуютъ другъ за другомъ согласно тому же закону, что и члены разложеній цѣлыхъ степеней; число же тѣхъ изъ этихъ рядовъ, которые придется соединять, конечное и формула приведенія n° 180 общая; слѣдовательно, мы непремѣнно прійдемъ къ тѣмъ же результатамъ, примѣняя одинъ и тотъ же способъ какъ въ случаѣ, когда m четное, такъ и въ томъ случаѣ, когда m нечетное. Слѣдовательно, двумя системами формулъ (1) и (2) n° 181 можно одинаково пользоваться, каково бы ни было цѣлое число m, однако при томъ только условіи, чтобы дуга a заключалась между предѣлами $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$. Слѣдовательно, соединяя первую формулу (1) со второй формулой (2) и вмѣсто a написавъ x, будемъ имѣть

$$(1)\quad \begin{cases} cos\,mx=1-\frac{m\,.\,m}{1\,.\,2}sin^2x+\frac{(m+2)m\,.\,m(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}sin^4x-\ldots, \\ sin\,mx=\frac{m}{1}sinx-\frac{(m+1)m(m-1)}{1\,.\,2\,.\,3}sin^3x \\ \qquad +\frac{(m+3)(m+1)m(m-1)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}sin^5x-\ldots. \end{cases}$$

лишь бы только, повторяемъ, m было числомъ цѣлымъ и значеніе x заключалось между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$.

Послѣ этого, я говорю, что формулы (1) справедливы для всѣхъ вещественныхъ значеній m, если дуга x будетъ заключаться между предѣлами $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$.

Въ самомъ дѣлѣ, обозначимъ чрезъ $\varphi(m)$ сумму правыхъ частей формулъ (1), соотвѣтственно умноженныхъ на 1 и $\sqrt{-1}$ или i; обозначимъ также чрезъ $\varphi(m_1)$ и $\varphi(m+m_1)$ результаты, которые получимъ, замѣняя m чрезъ m_1 и чрезъ $m+m_1$ въ функціи $\varphi(m)$. Количества $\varphi(m)$, $\varphi(m_1)$, $\varphi(m+m_1)$, расположенныя по возрастающимъ степенямъ $\sin x$, будутъ всегда сходящіеся ряды и эта сходимость не нарушится, если замѣнимъ каждый членъ его модулемъ: отсюда слѣдуетъ, что, если перемножимъ между собою ряды, выражаемые чрезъ $\varphi(m)$ и $\varphi(m_1)$, и если произведеніе расположимъ по восходящимъ степенямъ $\sin x$, то получимъ новый сходящійся рядъ, сумма котораго будетъ $\varphi(m)\varphi(m_1)$. Но когда m и m_1 приводятся къ цѣлымъ числамъ, то будемъ имѣть

$$\varphi(m)\varphi(m_1)=\varphi(m+m_1), \tag{2}$$

такъ какъ въ этомъ случаѣ равенства (1) остаются въ силѣ и будемъ имѣть

$$\varphi(m)=e^{imx}, \qquad \varphi(m_1)=e^{im_1x};$$

и въ этомъ случаѣ, коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ $\sin x$ въ обѣихъ частяхъ тождественно равны. Эти коэффиціенты будутъ цѣлыми функціями m и m_1 и изъ того, что ихъ равенство остается въ силѣ для всѣхъ цѣлыхъ значеній m и m_1, можно заключить, что то же равенство существуетъ, каковы бы ни были m и m_1; дѣйствительно, достаточно здѣсь повторить разсужденіе наше въ n° 180 относительно подобнаго случая. Такъ какъ равенство (2) есть тождество, то заключаемъ, что

$$\varphi(m)\varphi(m_1)\ldots\varphi(m_{\nu-1})=\varphi(m+m_1+\ldots+m_{\nu-1}),$$

каковы бы ни были ν количествъ m, $m_1,\ldots,m_{\nu-1}$; въ томъ случаѣ, когда эти количества равны между собою, будемъ имѣть

$$[\varphi(m)]^\nu=\varphi(m\nu).$$

Если примемъ $m=\frac{\mu}{\nu}$, гдѣ μ новое цѣлое число, то это равенство приметъ видъ

$$\left[\varphi\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\right]^\nu=\varphi(\mu)=e^{i\mu x};$$

слѣдовательно,

$$\varphi\left(\frac{\mu}{\nu}\right)=e^{\frac{i(\mu x+2k\pi)}{\nu}}=\cos\left(\frac{\mu}{\nu}x+\frac{2k\pi}{\nu}\right)+i\sin\left(\frac{\mu}{\nu}x+\frac{2k\pi}{\nu}\right),$$

гдѣ k обозначаетъ нѣкоторое цѣлое число, которое можемъ предположить меньшимъ ν. Но $\varphi\left(\frac{\mu}{\nu}\right)$ приводится къ 1 при $x=0$, слѣдовательно, тогда цѣлое число k равно нулю; отсюда слѣдуетъ, что мы имѣемъ постоянно $k=0$, такъ какъ правыя части формулъ (1) непрерывно измѣняются, когда x возростаетъ отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Такимъ образомъ имѣемъ

$$\varphi(m)=\cos mx+i\sin mx,$$

когда m равно раціональной дроби $\frac{\mu}{\nu}$ и отсюда очевидно слѣдуетъ, что та же самая формула будетъ справедливо, если m будетъ несоизмѣримое число.

Отсюда мы видимъ, что формулы (1) будутъ справедливы, каково бы ни было m, для всѣхъ значеній x, заключающихся между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$.

Разложеніе функціи arc sin z въ рядъ по возрастающимъ степенямъ z.

208. Формулы (1) n° 207 могутъ быть написаны слѣдующимъ образомъ:

$$2\frac{1-\cos mx}{m^2}$$
$$=\sin^2x+\frac{2}{3}\left(1-\frac{m^2}{4}\right)\frac{\sin^4x}{2}+\frac{2\cdot4}{3\cdot5}\left(1-\frac{m^2}{4}\right)\left(1-\frac{m^2}{16}\right)\frac{\sin^6x}{3}+\ldots$$
$$+\frac{2\cdot4\ldots(2n-2)}{3\cdot5\ldots(2n-1)}\left(1-\frac{m^2}{4}\right)\ldots\left[1-\frac{m^2}{(2n-2)^2}\right]\frac{\sin^{2n}x}{n}+\ldots,$$

$$x\frac{\sin mx}{mx}$$
$$=\sin x+\frac{1}{2}(1-m^2)\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}(1-m^2)\left(1-\frac{m^2}{9}\right)\frac{\sin^5 x}{5}+\cdots$$
$$+\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}(1-m^2)\ldots\left[1-\frac{m^2}{(2n-1)^2}\right]\frac{\sin^{2n+1}x}{2n+1}+\cdots.$$

Правыя части этихъ формулъ будутъ сходящіеся ряды, каково бы ни было число m; кромѣ того въ каждомъ изъ членовъ этихъ рядовъ произведеніе множителей, зависящихъ отъ m, приводится къ 1 при $m=0$, даже если число этихъ сомножителей будетъ безконечное, какъ это мы непосредственно видимъ, если обратимся къ формуламъ (1) n° 187. Слѣдовательно, для $m=0$, будемъ имѣть

$$(1)\quad\begin{cases} x^2=\sin^2 x+\frac{2}{3}\frac{\sin^4 x}{2}+\ldots+\frac{2\cdot 4\ldots(2n-2)}{3\cdot 5\ldots(2n-1)}\frac{\sin^{2n}x}{n}+\cdots, \\ x=\sin x+\frac{1}{2}\frac{\sin^3 x}{3}+\ldots+\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\frac{\sin^{2n+1}x}{2n+1}+\cdots. \end{cases}$$

Эти формулы, имѣющія силу для всѣхъ значеній x, заключающихся между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, даютъ разложенія дуги x и ея квадрата въ ряды, расположенные по цѣлымъ степенямъ $\sin x$.

Къ предыдущимъ выводамъ мы приходимъ еще при помощи слѣдующихъ соображеній. Лѣвыя части формулъ (1) n° 207 могутъ быть разложены въ ряды, расположенные по цѣлымъ степенямъ m, слѣдовательно, и правыя части могутъ быть также расположены. Если мы преобразуемъ такимъ образомъ формулы, о которыхъ идетъ рѣчь, и если мы сравнимъ въ обѣихъ частяхъ коэффиціенты при m и m^2, то вновь получимъ выше полученныя нами равенства (1).

Если во второй формулѣ (1) замѣнимъ x чрезъ $\frac{\pi}{2}-x$, то получимъ

$$(2)\qquad x=\frac{\pi}{2}-\cos x-\frac{1}{2}\frac{\cos^3 x}{3}-\ldots-\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\frac{\cos^{2n+1}x}{2n+1}+\ldots;$$

формула эта (2), дающая разложеніе дуги въ рядъ, расположенный по степенямъ ея косинуса, требуетъ, чтобы значеніе x заключалось между нулемъ и π.

Наконецъ, если замѣнимъ x во второй формулѣ (1) чрезъ $arc\sin z$ и въ формулѣ (2) чрезъ $arc\cos z$, то получимъ

$$(3)\quad\begin{cases} arc\sin z=z+\frac{1}{2}\frac{z^3}{3}+\ldots+\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}+\ldots, \\ arc\cos z=\frac{\pi}{2}-z-\frac{1}{2}\frac{z^3}{3}-\ldots-\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}+\ldots \end{cases}$$

Мы получимъ численные результаты, представляющіе нѣкоторый интересъ, если въ формулахъ (1) положимъ $x=\frac{\pi}{4}$, $=\frac{\pi}{3}$, $=\frac{\pi}{6}$.

Разложенія функцій $\log\sin x$ и $\log\cos x$ въ ряды по восходящимъ степенямъ x.

209. Если, на основаніи формулъ (1) n° 187, обозначимъ неперовы логариѳмы чрезъ характеристику l, какъ мы до сихъ поръ это дѣлали, и положимъ

$$(1)\quad\begin{cases} l\cos x-R_n=l\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)+\ldots+l\left[1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right], \\ l\sin x-R'_n=lx+l\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)+\ldots+l\left[1-\frac{x^2}{(n-1)^2\pi^2}\right], \end{cases}$$

то количества R_n и R'_n будутъ стремиться къ нулю, когда n будетъ стремиться къ безконечности. Но для всѣхъ значеній z, заключающихся между -1 и $+1$, имѣемъ

$$l(1-z)=\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots;$$

и такъ логариѳмы, которые въ ограниченномъ числѣ входятъ въ первое равенство (1), будутъ разлагаться въ ряды по восходящимъ степенямъ x для всѣхъ значеній этой перемѣнной, заключающихся между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$; точно также логариѳмы, которые входятъ въ правую часть второй формулы, будутъ разлагаться такимъ же образомъ для всѣхъ значеній x, заключающихся между $-\pi$ и $+\pi$,

Если мы составимъ эти разложенія и затѣмъ предположимъ, что n будетъ стремиться къ безконечности, то получимъ значенія $log\cos x$ и $log\sin x$, выраженныя въ безконечныхъ рядахъ. Но легко видѣть, что вычисленіе, которое необходимо выполнить, во всѣхъ отношеніяхъ похоже на то, которое мы изложили въ n° 192 для полученія ря-

довъ, которые выражаютъ значенія функцій $tang x$ и $cot x$. Вычисленія, относящіяся къ $-log\,cos x$ или $log\,sin x - log x$ отличаются отъ тѣхъ, которые относятся къ $tang x$ или къ $cot x - \frac{1}{x}$, только тѣмъ, что показатели x увеличены на единицу и что коэффиціенты раздѣлены на показателя x, обстоятельство, причину котораго объясняетъ дифференціальное исчисленіе. На основаніи этого можемъ непосредственно написать двѣ формулы

$$(2)\quad \begin{cases} l\cos x = -2(2^2-1)\frac{B_1}{1}\frac{x^2}{1.2} - \ldots - 2^{2n-1}(2^{2n}-1)\frac{B_n}{n}\frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} - \ldots, \\ l\sin x = lx - 2\frac{B_1}{1}\frac{x^2}{1.2} - \ldots - 2^{2n-1}\frac{B_n}{n}\frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} - \ldots, \end{cases}$$

гдѣ B_1, B_2,..., B_n,... обозначаютъ, какъ и въ n° 192, числа Бернулли. Вычитая первую формулу изъ второй, получимъ

$$(3)\quad \begin{cases} l\,tang x = lx + 2^2(2-1)\frac{B_1}{1}\frac{x^2}{1.2} + \ldots \\ \qquad + 2^{2n}(2^{2n-1}-1)\frac{B_n}{n}\frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} + \ldots \end{cases}$$

Первая формула (2) и формула (3) имѣютъ силу для всѣхъ значеній x, заключающихся между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, вторая формула (2) можетъ распространяться на всѣ значенія x, заключающіяся между $-\pi$ и $+\pi$. Случай, когда x отрицательное число, не вводитъ мнимыхъ выраженій, такъ какъ наши формулы заключаютъ въ сущности единственно только логаріѳмы $l\cos x$, $l\frac{\sin x}{x}$, $l\frac{tang x}{x}$, которые остаются вещественными, когда x отрицательное число.

Если замѣнимъ числа B_1, B_2,... чрезъ значенія, которыя мы получили въ n° 193, то получимъ

$$l\cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \ldots,$$

$$l\sin x = lx - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} - \ldots,$$

$$l\,tang x = lx + \frac{x^2}{3} + \frac{7x^4}{30} + \frac{62x^6}{2835} + \ldots.$$

210. Формулами (2) можно воспользоваться для составленія таблицъ логаріѳмовъ синусовъ и косинусовъ. Если въ нихъ положимъ $x = \frac{m}{n}\frac{\pi}{2}$, затѣмъ ихъ умножимъ на модуль M обыкновенныхъ логаріѳмовъ и подставимъ въ нихъ вмѣсто чиселъ Бернулли суммы S или S', связанныя съ этими числами при посредствѣ формулъ (8) n° 192, то получимъ

$$log\cos\left(\frac{m}{n}90^\circ\right) = -M\left(S_2\frac{m^2}{n^2} + \frac{1}{2}S_4\frac{m^4}{n^4} + \frac{1}{3}S_6\frac{m^6}{n^6} + \ldots\right),$$

$$log\sin\left(\frac{m}{n}90^\circ\right) = log\frac{\pi}{2} + log\,m - log\,n - M\left(\frac{1}{2^2}S'_2\frac{m^2}{n^2} + \frac{1}{2.2^4}S'_4\frac{m^4}{n^4} + \frac{1}{3.2^6}S'_6\frac{m^6}{n^6} + \ldots\right),$$

гдѣ характеристика log обозначаетъ обыкновенные логаріѳмы. Мы могли бы получить ряды быстрѣе сходящіеся, если бы въ формулахъ (1), не разлагая въ ряды, сохранили логаріѳмы количествъ $1 - \frac{4x^2}{\pi^2}$ и $1 - \frac{x^2}{\pi^2}$, которыя приводятся здѣсь къ $1 - \frac{m^2}{n^2}$ и $1 - \frac{m^2}{4n^2}$; разложенія этихъ логаріѳмовъ будутъ

$$log\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right) = -M\left(\frac{m^2}{n^2} + \frac{1}{2}\frac{m^4}{n^4} + \frac{1}{3}\frac{m^6}{n^6} + \ldots\right),$$

$$log\left(1 - \frac{m^2}{4n^2}\right) = -M\left(\frac{m^2}{2^2n^2} + \frac{1}{2}\frac{m^4}{2^4.n^4} + \frac{1}{3}\frac{m^6}{2^6.n^6} + \ldots\right),$$

и если эти равенства соотвѣтственно вычтемъ изъ двухъ предыдущихъ, то получимъ

$$log\cos\left(\frac{m}{n}90^\circ\right) = log(n+m) + log(n-m) - 2\,log\,n - M\left[(S_2-1)\frac{m^2}{n^2} + \frac{1}{2}(S_4-1)\frac{m^4}{n^4} + \frac{1}{3}(S_6-1)\frac{m^6}{n^6} + \ldots\right],$$

$$log\sin\left(\frac{m}{n}90^\circ\right) = log\frac{\pi}{8} + log\,m + log(2n+m) + log(2n-m) - 3\,log\,n - M\left[\frac{1}{2^2}(S'_2-1)\frac{m^2}{n^2} + \frac{1}{2.2^4}(S'_4-1)\frac{m^4}{n^4} + \frac{1}{3.2^6}(S'_6-1)\frac{m^6}{n^6} + \ldots\right].$$

Эти двѣ формулы очень удобны для той цѣли, которую мы имѣемъ въ виду; вычитая одну изъ другой, мы получимъ значеніе $log\,tang\left(\frac{m}{n}90^\circ\right)$.

Если вычислимъ численные коэффиціенты въ предыдущихъ формулахъ съ двадцатью десятичными знаками, то получимъ слѣдующіе результаты:

$$\log\cos\left(\frac{m}{n}\,90^\circ\right)=\log(n-m)+\log(n+m)-2\log n$$

$-0{,}10149\ 48593\ 41892\ 80353\ \frac{m^2}{n^2}$	$-0{,}00000\ 00000\ 01258\ 14224\ \frac{m^{22}}{n^{22}}$
$-0{,}00318\ 72940\ 65451\ 07231\ \frac{m^4}{n^4}$	$-0{,}00000\ 00000\ 00128\ 14304\ \frac{m^{24}}{n^{24}}$
$-0{,}00020\ 94858\ 00017\ 41893\ \frac{m^6}{n^6}$	$-0{,}00000\ 00000\ 00013\ 14283\ \frac{m^{26}}{n^{26}}$
$-0{,}00001\ 68483\ 48598\ 30743\ \frac{m^8}{n^8}$	$-0{,}00000\ 00000\ 00001\ 35726\ \frac{m^{28}}{n^{28}}$
$-0{,}00000\ 14801\ 93986\ 89554\ \frac{m^{10}}{n^{10}}$	$-0{,}00000\ 00000\ 00000\ 14062\ \frac{m^{30}}{n^{30}}$
$-0{,}00000\ 01365\ 02272\ 22565\ \frac{m^{12}}{n^{12}}$	$-0{,}00000\ 00000\ 00000\ 01465\ \frac{m^{32}}{n^{32}}$
$-0{,}00000\ 00129\ 81714\ 73773\ \frac{m^{14}}{n^{14}}$	$-0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00153\ \frac{m^{34}}{n^{34}}$
$-0{,}00000\ 00012\ 61471\ 15311\ \frac{m^{16}}{n^{16}}$	$-0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00016\ \frac{m^{36}}{n^{36}}$
$-0{,}00000\ 00001\ 24567\ 12069\ \frac{m^{18}}{n^{18}}$	$-\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$
$-0{,}00000\ 00000\ 12455\ 90006\ \frac{m^{20}}{n^{20}}$	

$$\log\sin\left(\frac{m}{n}\,90^\circ\right)=\log m+\log(2n-m)+\log(2n+m)-3\log n$$
$$+\bar{1},59405\ 98857\ 02190\ 26861$$

$-0{,}07002\ 28266\ 05901\ 92014\ \frac{m^2}{n^2}$	$-0{,}00000\ 00000\ 00702\ 67969\ \frac{m^{18}}{n^{18}}$
$-0{,}00111\ 72664\ 41661\ 84613\ \frac{m^4}{n^4}$	$-0{,}00000\ 00000\ 00039\ 51077\ \frac{m^{20}}{n^{20}}$
$-0{,}00003\ 92291\ 46453\ 91834\ \frac{m^6}{n^6}$	$-0{,}00000\ 00000\ 00002\ 24455\ \frac{m^{22}}{n^{22}}$
$-0{,}00000\ 17292\ 70798\ 36059\ \frac{m^8}{n^8}$	$-0{,}00000\ 00000\ 00000\ 12858\ \frac{m^{24}}{n^{24}}$
$-0{,}00000\ 00843\ 62986\ 29875\ \frac{m^{10}}{n^{10}}$	$-0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00738\ \frac{m^{26}}{n^{26}}$
$-0{,}00000\ 00043\ 48715\ 50180\ \frac{m^{12}}{n^{12}}$	$-0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00043\ \frac{m^{28}}{n^{28}}$
$-0{,}00000\ 00002\ 31931\ 21410\ \frac{m^{14}}{n^{14}}$	$-0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00002\ \frac{m^{30}}{n^{30}}$
$-0{,}00000\ 00000\ 12659\ 07465\ \frac{m^{16}}{n^{16}}$	$-\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$

Разложенія въ ряды или въ безконечныя произведенія круговыхъ функцій мнимыхъ перемѣнныхъ.

212. Формулы, выражающія функціи $\cos x$ и $\sin x$ при помощи безконечныхъ произведеній линейныхъ множителей, не ограничиваются однимъ случаемъ, когда дуга x вещественна; напротивъ того, эти формулы остаются въ силѣ, каково бы ни было x. То же самое мы имѣемъ и относительно формулъ, которыя выражаютъ значенія функцій $\tang x$, $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, разложенныхъ на безконечное число простыхъ дробей. Наконецъ, ряды, расположенные по цѣлымъ и восходящимъ степенямъ x, которые выражаютъ функціи $\tang x$, $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, въ случаѣ, когда x имѣетъ вещественное значеніе, заключающееся между соотвѣтственными предѣлами, не перестаютъ выражать тѣхъ же функцій, когда x становится мнимымъ, лишь бы только модуль этой перемѣнной оставался меньше предѣла, котораго она не должна превосходить, когда она вещественна и положительна.

Мы выведемъ здѣсь эти различныя формулы, при чемъ наши доказательства относятся безразлично какъ къ случаю перемѣнной вещественной, такъ и къ случаю перемѣнной мнимой; эти доказательства основываются на слѣдующей леммѣ:

Лемма.—*Если чрезъ α обозначимъ вещественную дугу, заключающуюся между нулемъ и $\frac{\pi}{2}$, и чрезъ z вещественную или мнимую перемѣнную, модуль которой меньше α, то модуль отношенія $\frac{\tang z}{\tang\alpha}$ будетъ меньше модуля $\frac{z}{\alpha}$.*

Въ самомъ дѣлѣ, если положимъ

$$z=x+iy,$$

то будемъ имѣть

$$\operatorname{mod}\frac{\tang^2 z}{\tang^2\alpha}=\frac{\tang(x+iy)\tang(x-iy)}{\tang^2\alpha}$$
$$=\frac{\frac{1}{\tang^2\alpha}\left(\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}\right)^2+\frac{\tang^2 x}{\tang^2\alpha}}{1+\left(\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}\right)^2\tang^2 x};$$

но такъ какъ модуль z, по предположенію, меньше α, то будемъ

имѣть $x^2<\alpha^2$ и, на основаніи леммы n° 186, $\frac{tang^2 x}{tang^2\alpha}<\frac{x^2}{\alpha^2}$; кромѣ того имѣемъ

$$\frac{1}{tang^2\alpha}<\frac{1}{\alpha^2} \text{ и } \left(\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}\right)^2=y^2\left(\frac{1+\frac{y^2}{1.2.3}+\dots}{1+\frac{y^2}{1.2}+\dots}\right)^2<y^2;$$

слѣдовательно,

$$mod\frac{tang^2 z}{tang^2\alpha}<\frac{x^2+y^2}{\alpha^2} \text{ или } mod\frac{tang z}{tang\alpha}<mod\frac{z}{\alpha}.$$

Слѣдствіе.—*Если, при тѣхъ же обозначеніяхъ, модуль* ρ *числа* z *меньше* $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$, *то можемъ написать*

$$1-\frac{tang^2 z}{tang^2\alpha}=e^{2\vartheta\frac{\rho^2}{\alpha^2}}, \quad \frac{tang^2 z}{tang^2 z-tang^2\alpha}=2\vartheta\frac{\rho^2}{\alpha^2},$$

гдѣ e *обозначаетъ основаніе неперовыхъ логариѳмовъ, а* θ *и* ϑ *мнимыя выраженія, модули которыхъ меньше единицы.*

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи формулы (16) n° 203, имѣемъ

$$modl\left(1-\frac{tang^2 z}{tang^2\alpha}\right)<\frac{mod\frac{tang^2 z}{tang^2\alpha}}{1-mod\frac{tang^2 z}{tang^2\alpha}},$$

лишь бы только неперовъ логариѳмъ, который находится въ лѣвой части, былъ выбранъ такъ, чтобы абсолютное значеніе коэффиціента при i было бы меньше $\frac{\pi}{2}$. Но, на основаніи нашей леммы, правая часть предыдущаго неравенства меньше дроби $\frac{\frac{\rho^2}{\alpha^2}}{1-\frac{\rho^2}{\alpha^2}}$; кромѣ того, на основаніи предположенія $\frac{\rho^2}{\alpha^2}<\frac{1}{2}$, эта дробь меньше 1 и она увеличится, если къ ея числителю и знаменателю прибавимъ по $\frac{\rho^2}{\alpha^2}$; слѣдовательно, она меньше $\frac{2\rho^2}{\alpha^2}$.

Такъ какъ модуль неперова логариѳма числа $1-\frac{tang^2 z}{tang^2\alpha}$ меньше $\frac{2\rho^2}{\alpha^2}$, то этотъ логариѳмъ равенъ произведенію $\frac{2\rho^2}{\alpha^2}$ на мнимое выраженіе θ, котораго модуль меньше 1; слѣдовательно, будемъ имѣть

$$1-\frac{tang^2 z}{tang^2\alpha}=e^{2\theta\frac{\rho^2}{\alpha^2}}.$$

Во вторыхъ, на основаніи (162), имѣемъ:

$$mod\left(1-\frac{tang^2 z}{tang^2\alpha}\right)\geqslant 1-mod\frac{tang^2 z}{tang^2\alpha},$$

слѣдовательно,

$$mod\frac{tang^2 z}{tang^2\alpha-tang^2 z}<\frac{mod\frac{tang^2 z}{tang^2\alpha}}{1-mod\frac{tang^2 z}{tang^2\alpha}};$$

въ силу нашей леммы, лѣвая часть этого неравенства подавно будетъ меньше $\frac{\frac{\rho^2}{\alpha^2}}{1-\frac{\rho^2}{\alpha^2}}$ и меньше $\frac{2\rho^2}{\alpha^2}$. Если, поэтому, обозначимъ чрезъ ϑ мнимое выраженіе, модуль котораго меньше 1, то будемъ имѣть

$$\frac{tang^2 z}{tang^2\alpha-tang^2 z}=2\vartheta\frac{\rho^2}{\alpha^2}.$$

212. Такъ какъ формулы, относящіяся къ сложенію дугъ, приложимы какъ къ мнимымъ, такъ и къ вещественнымъ дугамъ, то всѣ формулы, которыя выводятся изъ этихъ, имѣютъ ту же общность, какъ мы уже объ этомъ и говорили. Отсюда слѣдуетъ, что формулы (1), (2), (3), (4) n° 185 будутъ оставаться въ силѣ, если замѣнимъ въ нихъ вещественную дугу x чрезъ мнимое выраженіе z, модуль котораго будетъ произвольное положительное число ρ. Послѣ этого разсмотримъ формулы (3), въ которыхъ m обозначаетъ число четное; обозначимъ чрезъ n какое нибудь четное число, однако достаточно большое для того, чтобы $\frac{n\pi}{2}$ было бы больше $\rho\sqrt{2}$, и примемъ $m>n$; мы можемъ написать

$$(1)\quad \begin{cases} \cos z = \cos^m \frac{z}{m}\left(1-\frac{tang^2\frac{z}{m}}{tang^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{tang^2\frac{z}{m}}{tang^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\cdots \\ \qquad \times\left(1-\frac{tang^2\frac{z}{m}}{tang^2\frac{(n-1)\pi}{2m}}\right)(1-\varepsilon_{m,n}), \\ \sin z = \cos^m \frac{z}{m}\cdot m\, tang\frac{z}{m}\left(1-\frac{tang^2\frac{z}{m}}{tang^2\frac{2\pi}{2m}}\right)\cdots \\ \qquad \times\left(1-\frac{tang^2\frac{z}{m}}{tang^2\frac{(n-2)\pi}{2m}}\right)(1-\eta_{m,n}), \end{cases}$$

полагая

$$1-\varepsilon_{m,n}=\left(1-\frac{tang^2\frac{z}{m}}{tang^2\frac{(n+1)\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1-\frac{tang^2\frac{z}{m}}{tang^2\frac{(m-1)\pi}{2m}}\right),$$

$$1-\eta_{m,n}=\left(1-\frac{tang^2\frac{z}{m}}{tang^2\frac{n\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1-\frac{tang^2\frac{z}{m}}{tang^2\frac{(m-2)\pi}{2m}}\right).$$

На основаніи слѣдствія доказанной выше леммы, неперовы логариѳмы выраженій $1-\varepsilon_{m,n}$ и $1-\eta_{m,n}$ будутъ

$$l(1-\varepsilon_{m,n})=\frac{8\rho^2}{\pi^2}\left[\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}+\frac{\theta_{n+2}}{(n+3)^2}+\cdots+\frac{\theta_{m-1}}{(m-1)^2}\right],$$

$$l(1-\eta_{m,n})=\frac{8\rho^2}{\pi^2}\left[\frac{\theta_{n}}{n^2}+\frac{\theta_{n+2}}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{\theta_{m-2}}{(m-2)^2}\right],$$

гдѣ θ_n, θ_{n+1},.... обозначаютъ выраженія мнимыя, модули которыхъ меньше 1. Но модули суммъ въ скобкахъ меньше суммъ модулей ихъ слагаемыхъ; слѣдовательно, они будутъ соотвѣтственно меньше суммъ S_{n+1} и S_n безконечныхъ рядовъ

$$S_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+3)^2}+\cdots,\quad S_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots,$$

сходимость которыхъ была доказана раньше. Слѣдовательно, если обозначимъ чрезъ λ_n и λ_{n+1} мнимыя выраженія, модули которыхъ меньше 1, то получимъ

$$(2)\quad \begin{cases} 1-\varepsilon_{m,n}=e^{\frac{8\rho^2}{\pi^2}\lambda_{n+1}S_{n+1}}, \\ 1-\eta_{m,n}=e^{\frac{8\rho^2}{\pi^2}\lambda_n S_n}. \end{cases}$$

Предположимъ теперь, что n не мѣняется, а m возрастаетъ до безконечности; произведеніе $m\, tang\frac{z}{m}$ или $z\,\frac{tang\frac{z}{m}}{\frac{z}{m}}$ приводится къ z при $m=\infty$; равнымъ образомъ отношенія двухъ тангенсовъ, входящихъ въ формулы (1), будутъ имѣть тѣ же самые предѣлы, что и отношенія соотвѣтственныхъ дугъ; наконецъ, множитель $\cos^m\frac{z}{m}=\left(1-\frac{2\sin^2\frac{z}{2m}}{m}\right)^m$ приводится къ единицѣ, какъ въ случаѣ, когда z вещественно, на основаніи предложенія, доказаннаго въ n° 198 (*Замѣчаніе*). Поэтому, если обозначимъ чрезъ ε_n и η_n предѣлы $\varepsilon_{m,n}$ и $\eta_{m,n}$, то формулы (1), при $m=\infty$, примутъ видъ

$$(3)\quad \begin{cases} \cos z=\left(1-\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left[1-\frac{4z^2}{(n-1)^2\pi^2}\right](1-\varepsilon_n), \\ \sin z=z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left[1-\frac{z^2}{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2\pi^2}\right](1-\eta_n), \end{cases}$$

и затѣмъ будемъ имѣть, на основаніи формулъ (2),

$$(4)\quad \begin{cases} 1-\varepsilon_n=e^{\frac{8\rho^2}{\pi^2}\lambda'_{n+1}S_{n+1}}, \\ 1-\eta_n=e^{\frac{8\rho^2}{\pi^2}\lambda'_n S_n}, \end{cases}$$

гдѣ λ'_{n+1} и λ'_n обозначаютъ мнимыя выраженія, модули которыхъ меньше 1.

Но суммы S_n и S_{n+1} ни что иное, какъ остатки сходящихся рядовъ

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots,\quad \frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots;$$

эти остатки стремятся къ нулю, когда n неограниченно увеличивается; слѣдовательно, будемъ имѣть

$$\varepsilon_n=0,\ \eta_n=0 \text{ для } n=\infty.$$

Слѣдовательно, если n будетъ стремиться къ безконечности, то формулы (3) обращаются въ предѣлѣ въ слѣдующія

$$(5)\quad \begin{cases} \cos z = \left(1-\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{25\pi^2}\right)\cdots, \\ \sin z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\cdots; \end{cases}$$

замѣняя въ этихъ формулахъ (5) z чрезъ iz, получимъ

$$(6)\quad \begin{cases} \frac{e^z+e^{-z}}{2} = \left(1+\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4z^2}{25\pi^2}\right)\cdots, \\ \frac{e^z-e^{-z}}{2} = z\left(1+\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\cdots. \end{cases}$$

Если положимъ $z=x+iy$, то лѣвыя части формулъ (6) приводятся соотвѣтственно къ

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cos y + i\,\frac{e^x-e^{-x}}{2}\sin y,\quad \frac{e^x-e^{-x}}{2}\cos y + i\,\frac{e^x+e^{-x}}{2}\sin y,$$

откуда слѣдуетъ, что эти выраженія разложимы на безконечное число линейныхъ сомножителей и, вслѣдствіе этого, это справедливо и для квадратовъ ихъ модулей, а именно для выраженій

$$\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}+\cos 2y\right),\quad \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}-\cos 2y\right).$$

Формулы (6) принимаютъ болѣе простой видъ, если напишемъ $\frac{\pi z}{2}$ вмѣсто z; такимъ образомъ получимъ

$$(7)\quad \begin{cases} \frac{e^{\frac{\pi z}{2}}+e^{-\frac{\pi z}{2}}}{2} = (1+z^2)\left(1+\frac{z^2}{9}\right)\left(1+\frac{z^2}{25}\right)\cdots, \\ \frac{e^{\frac{\pi z}{2}}-e^{-\frac{\pi z}{2}}}{2} = \left(1+\frac{z^2}{4}\right)\left(1+\frac{z^2}{16}\right)\left(1+\frac{z^2}{36}\right)\cdots. \end{cases}$$

213. Формулы (3), (4), (5) и (6) n° 189 справедливы, когда мы замѣнимъ вещественную дугу x мнимой перемѣнной z, модуль которой будетъ произвольное положительное число ρ. Поэтому, если выберемъ, какъ выше, такое четное число n, чтобы $\frac{n\pi}{2}$ было больше $\rho\sqrt{2}$, и если затѣмъ возьмемъ для m число четное, большее n, то формулы (5) n° 189 дадутъ

$$(1)\quad \begin{cases} \tan g z = \tan g\frac{z}{m} + \frac{2}{m}\left(\cot\frac{z}{m}+\tan g\frac{z}{m}\right) \\ \times\left[\frac{\tan g^2\frac{z}{m}}{\tan g^2\frac{\pi}{2m}-\tan g^2\frac{z}{m}}+\cdots+\frac{\tan g^2\frac{z}{m}}{\tan g^2\frac{(n-1)\pi}{2m}-\tan g^2\frac{z}{m}}+\varepsilon_{m,n}\right], \\ \cot z = \left(\frac{2}{m}\cot\frac{2z}{m}-\tan g\frac{z}{m}\right)-\frac{2}{m}\left(\cot\frac{z}{m}+\tan g\frac{z}{m}\right) \\ \times\left[\frac{\tan g^2\frac{z}{m}}{\tan g^2\frac{2\pi}{2m}-\tan g^2\frac{z}{m}}+\cdots+\frac{\tan g^2\frac{z}{m}}{\tan g^2\frac{(n-2)\pi}{2m}-\tan g^2\frac{z}{m}}+\eta_{m,n}\right], \end{cases}$$

гдѣ

$$\varepsilon_{m,n} = \frac{\tan g^2\frac{z}{m}}{\tan g^2\frac{(n+1)\pi}{2m}-\tan g^2\frac{z}{m}}+\cdots+\frac{\tan g^2\frac{z}{m}}{\tan g^2\frac{(m-1)\pi}{2m}-\tan g^2\frac{z}{m}},$$

$$\eta_{m,n} = \frac{\tan g^2\frac{z}{m}}{\tan g^2\frac{n\pi}{2m}-\tan g^2\frac{z}{m}}+\cdots+\frac{\tan g^2\frac{z}{m}}{\tan g^2\frac{(m-2)\pi}{2m}-\tan g^2\frac{z}{m}}.$$

На основаніи слѣдствія n° 211 мы можемъ написать

$$\varepsilon_{m,n} = \frac{8\rho^2}{\pi^2}\left[\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}+\frac{\theta_{n+3}}{(n+3)^2}+\cdots+\frac{\theta_{m-1}}{(m-1)^2}\right],$$

$$\eta_{m,n} = \frac{8\rho^2}{\pi^2}\left[\frac{\theta_n}{n^2}+\frac{\theta_{n+2}}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{\theta_{m-2}}{(m-2)^2}\right],$$

гдѣ θ_n, θ_{n+1},.... выраженія мнимыя, модули которыхъ меньше 1. Повторивъ здѣсь безъ измѣненія разсужденіе, которымъ мы воспользовались въ n° 212, мы можемъ представить эти значенія $\varepsilon_{m,n}$ и $\eta_{m,n}$ въ слѣдующемъ видѣ:

$$(2)\quad \varepsilon_{m,n} = \frac{8\rho^2}{\pi^2}\lambda_{n+1}S_{n+1},\quad \eta_{m,n} = \frac{8\rho^2}{\pi^2}\lambda_n S_n,$$

гдѣ S_n и S_{n+1} обозначаютъ то же, что и въ n° 212, а λ_n, λ_{n+1} обозначаютъ мнимыя выраженія, модули которыхъ меньше 1.

Если число n остается постояннымъ, а m стремится къ безконечности, то формулы (1) дадутъ

$$(3)\quad \begin{cases} tang z = \dfrac{2z}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - z^2} + \ldots + \dfrac{2z}{\left[(n-1)\frac{\pi}{2}\right]^2 - z^2} + \dfrac{2}{z}\varepsilon_n, \\ cot z = \dfrac{1}{z} - \dfrac{2z}{\pi^2 - z^2} - \ldots - \dfrac{2z}{\left[\frac{(n-2)\pi}{2}\right]^2 - z^2} - \dfrac{2}{z}\eta_n, \end{cases}$$

гдѣ ε_n и η_n обозначаютъ предѣлы $\varepsilon_{m,n}$ и $\eta_{m,n}$, и на основаніи формулъ (2) будемъ имѣть всегда

$$(4)\qquad \varepsilon_n = \frac{8\rho^2}{\pi^2}\lambda'_{n+1} S_{n+1},\quad \eta_n = \frac{8\rho^2}{\pi}\lambda'_n S_n,$$

гдѣ λ'_{n+1} и λ'_n обозначаютъ мнимыя выраженія, модули которыхъ меньше 1.

Если теперь число n будетъ стремиться къ безконечности, то количества ε_n и η_n будутъ стремиться къ нулю и въ предѣлѣ будемъ имѣть

$$(5)\quad \begin{cases} tang z = \dfrac{2z}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - z^2} + \dfrac{2z}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 - z^2} + \ldots, \\ cot z = \dfrac{1}{z} - \dfrac{2z}{\pi^2 - z^2} - \dfrac{2z}{(2\pi)^2 - z^2} + \ldots. \end{cases}$$

Изъ этихъ формулъ мы можемъ вывести, какъ мы это сдѣлали въ n° 191, въ случаѣ когда z число вещественное, двѣ другія формулы

$$(6)\quad \begin{cases} cosec z = \dfrac{1}{z} + \dfrac{2z}{\pi^2 - z^2} - \dfrac{2z}{(2\pi)^2 - z^2} + \dfrac{2z}{(3\pi)^2 - z^2} - \ldots, \\ sec z = \dfrac{\pi}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - z^2} - \dfrac{3\pi}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 - z^2} + \dfrac{5\pi}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2 - z^2} - \ldots, \end{cases}$$

которыя, поэтому, остаются въ силѣ, также какъ и формулы (5), для всѣхъ вещественныхъ или мнимыхъ значеній z.

Если замѣнимъ z чрезъ iz, то формулы (5) и (6) принимаютъ слѣдующій видъ:

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \dfrac{2z}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + z^2} + \dfrac{2z}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 + z^2} + \ldots, \\ \dfrac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = \dfrac{1}{z} - \dfrac{2z}{\pi^2 + z^2} + \dfrac{2z}{(2\pi)^2 + z^2} + \ldots, \\ \dfrac{2}{e^z - e^{-z}} = \dfrac{1}{z} - \dfrac{2z}{\pi^2 + z^2} + \dfrac{2z}{(2\pi)^2 + z^2} - \dfrac{2z}{(3\pi)^2 + z^2} + \ldots, \\ \dfrac{2}{e^z + e^{-z}} = \dfrac{\pi}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + z^2} - \dfrac{3\pi}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 + z^2} + \dfrac{5\pi}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2 + z^2} - \ldots. \end{cases}$$

214. Способъ, которымъ мы воспользовались въ n° 192 для того, чтобы получить разложенія функцій $tang x$ и $cot x$ въ ряды, расположенные по цѣлымъ и восходящимъ степенямъ x, состоитъ въ простомъ преобразованіи формулъ (5); такъ какъ послѣднія остаются въ силѣ, какова бы ни была перемѣнная x, то разсужденія n° 192 приложимы безъ измѣненія къ случаю мнимой перемѣнной. Такимъ образомъ будемъ имѣть двѣ формулы

$$(8)\quad \begin{cases} tang z = 2^2(2^2-1)B_1\dfrac{z}{1.2} + 2^4(2^4-1)B_2\dfrac{z^3}{1.2.3.4} + \ldots \\ \qquad + 2^{2n}(2^{2n}-1)B_n\dfrac{z^{2n-1}}{1.2\ldots 2n} + \ldots, \\ cot z = \dfrac{1}{z} - 2^2 B_1\dfrac{z}{1.2} - \ldots - 2^{2n}B_n\dfrac{z^{2n+1}}{1.2\ldots 2n} + \ldots, \end{cases}$$

которыя останутся въ силѣ, первая для всѣхъ значеній z, модуль которыхъ меньше $\frac{\pi}{2}$, а вторая для значеній z, модуль которыхъ меньше π. Замѣняя z на $\frac{z}{2}$ во второй формулѣ, получимъ, какъ въ n° 192,

$$(9)\quad 1 - \frac{z}{2}\cot\frac{z}{2} = B_1\frac{z^2}{1.2} + B_2\frac{z^4}{1.2.3.4} + \ldots + B_n\frac{z^{2n}}{1.2\ldots 2n} + \ldots.$$

Въ этихъ формулахъ (8) и (9) B_1, B_2,.... обозначаютъ, какъ и раньше, числа Бернулли. Если замѣнимъ z чрезъ iz, то формулы (8) примутъ видъ

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = 2^2(2^2-1)B_1\dfrac{z}{1.2} - 2^4(2^4-1)B_2\dfrac{z^3}{1.2.3.4} + \ldots \\ \qquad + (-1)^n.2^{2n}(2^{2n}-1)B_n\dfrac{z^{2n-1}}{1.2\ldots 2n} + \ldots, \\ \dfrac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = \dfrac{1}{z} + 2^2 B_1\dfrac{z}{1.2} - 2^4 B_2\dfrac{z^3}{1.2.3.4} + \ldots \\ \qquad + (-1)^{n-1}2^{2n}B_n\dfrac{z^{2n-1}}{1.2\ldots 2n} + \ldots; \end{cases}$$

формула (9) вслѣдствіе замѣны приметъ видъ

$$(11)\quad \frac{z}{2}\cdot\frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}} = 1 + B_1\frac{z^2}{1.2} - B_2\frac{z^4}{1.2.3.4} + \ldots;$$

но лѣвая часть этой формулы (11) приводится къ $\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2}$, поэтому имѣемъ слѣдующую формулу

$$(12)\quad \frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}+\frac{1}{2}=\frac{B_1 z}{1\,.\,2}-\frac{B_2 z^3}{1.2.3.4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{B_n z^{2n-1}}{1.2\ldots 2n}+\ldots,$$

которою часто пользуются въ анализѣ и которая остается въ силѣ для всѣхъ значеній z, модуль которыхъ меньше 2π.

Наконецъ, анализъ, приведенный въ n° 195, приложимъ также безъ измѣненія и въ случаѣ мнимой дуги и тогда будемъ имѣть

$$(13)\quad \begin{cases} cosec\, z=\frac{1}{z}+(2^2-2)B_1\frac{z}{1\,.\,2}+\ldots+(2^{2n}-2)B_n\frac{z^{2n-1}}{1.2\ldots 2n}+\ldots, \\ sec\, z=1+C_1\frac{z^2}{1\,.\,2}+C_2\frac{z^4}{1.2.3.4}+\ldots+C_n\frac{z^{2n}}{1.2\ldots 2n}+\ldots, \end{cases}$$

гдѣ C_1, C_2,.... обозначаютъ тѣ же числа, что и въ n° 195. Первая изъ формулъ (13) требуетъ, чтобы модуль z былъ меньше π, а вторая, чтобы этотъ модуль былъ меньше $\frac{\pi}{2}$. Если замѣнимъ z чрезъ iz, то эти формулы примутъ слѣдующій видъ

$$(14)\quad \begin{cases} \frac{2}{e^z-e^{-z}}=\frac{1}{z}-(2^2-2)B_1\frac{z}{1\,.\,2}+\ldots \\ \qquad\qquad +(-1)^n(2^{2n}-2)B_n\frac{z^{2n-1}}{1.2\ldots 2n}+\ldots, \\ \frac{2}{e^z+e^{-z}}=1-C_1\frac{z^2}{1\,.\,2}+C_2\frac{z^4}{1.2.3.4}-\ldots \\ \qquad\qquad +(-1)^n C_n\frac{z^{2n}}{1.2\ldots 2n}+\ldots. \end{cases}$$

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

РѢШЕНІЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ ПРИ ПОМОЩИ РЯДОВЪ И ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХЪ ФОРМУЛЪ.

О выраженіи угла при вычисленіи.

215. Пріемы рѣшеній различныхъ задачъ прямолинейной и сферической тригонометріи, изложенные нами въ главахъ III и IV, не оставляютъ ничего желать въ отношеніи ихъ строгости; но есть случаи, когда гораздо проще и удобнѣе замѣнить общіе способы частными пріемами, или для того, чтобы сократить вычисленія, или для того, чтобы получить результаты болѣе точные и менѣе зависящіе отъ погрѣшностей таблицъ. Въ этой главѣ мы разсмотримъ самые главные случаи; рѣшенія, которыя мы приведемъ, всѣ основаны на употребленіи рядовъ.

216. Углы при вычисленіи выражаются или при посредствѣ градусовъ, минутъ и секундъ, которые они содержатъ, или при помощи абсолютныхъ длинъ дугъ, измѣряющихъ эти углы, при чемъ радіусъ круга принимается за 1. Часто въ приложеніяхъ тригонометріи бываетъ необходимо перейти отъ одного изъ этихъ выраженій къ другому; мы покажемъ способы, при помощи которыхъ обыкновенно производятъ это преобразованіе.

Пусть будетъ x длина дуги, измѣряющей нѣкоторый уголъ, и x' цѣлое или дробное число секундъ, заключающихся въ этомъ углѣ; очевидно, что x равно дугѣ $1''$, взятой x' разъ, и будемъ имѣть

$$x=x'\times arc\,1'';$$

но такъ какъ дуга $1''$ отличается отъ своего синуса на количество меньшее единицы четырнадцатаго десятичнаго порядка, то мы мо-

жемъ въ приложеніяхъ вмѣсто дуги подставить ея синусъ, и тогда напишемъ

$$x = x' \sin 1'' \text{ или } x' = \frac{x}{\sin 1''}.$$

Предположимъ, на основаніи этого, что въ нѣкоторую формулу входитъ уголъ x, выраженный въ частяхъ радіуса; если мы пожелаемъ выразить этотъ уголъ въ секундахъ, то для этого мы должны замѣнить x чрезъ $x' \sin 1''$ или, просто, отбрасывая знакъ, чрезъ $x \sin 1''$. Напротивъ того, если уголъ x выраженъ въ секундахъ, а желаютъ выразить его въ частяхъ радіуса, то тогда слѣдуетъ замѣнить x чрезъ $\frac{x}{\sin 1''}$.

Перечень формулъ, выражающихъ разложенія круговыхъ функцій въ ряды.

217. Напишемъ здѣсь тѣ изъ выведенныхъ нами въ предыдущей главѣ формулъ, которыя чаще всего примѣняются при тригонометрическихъ рѣшеніяхъ. Во-первыхъ, имѣемъ шесть слѣдующихъ формулъ

$$(1)\quad \begin{cases} \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots, \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots, \\ \operatorname{tang} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots, \\ \cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \ldots, \\ \sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \ldots, \\ \operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + \frac{31x^5}{15120} + \ldots, \end{cases}$$

которыя даютъ тригонометрическія линіи дуги x, выраженныя въ функціи этой дуги, и, во-вторыхъ, двѣ формулы

$$(2)\quad \begin{cases} x = \sin x + \frac{\sin^3 x}{6} + \frac{3 \sin^5 x}{40} + \ldots, \\ x = \operatorname{tang} x - \frac{\operatorname{tang}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tang}^5 x}{5} - \ldots, \end{cases}$$

которыя опредѣляютъ дугу x въ функціи ея синуса или ея тангенса.

Въ формулахъ (1) и (2) дуга x выражена въ частяхъ радіуса; если мы пожелаемъ выразить ее въ секундахъ, то должны написать $x \sin 1''$ вмѣсто x.

218. Въ n° 203 мы видѣли, что если количества θ и r опредѣляются двумя равенствами вида

$$(3)\quad \operatorname{tang}\theta = \frac{\rho \sin\omega}{1 + \rho\cos\omega}, \quad r = \sqrt{1 + 2\rho\cos\omega + \rho^2},$$

то мы можемъ вычислить уголъ θ и неперовъ логариѳмъ числа r при посредствѣ формулъ

$$\theta = \frac{\rho\sin\omega}{1} - \frac{\rho^2 \sin 2\omega}{2} + \frac{\rho^3 \sin 3\omega}{3} - \ldots,$$

$$lr = \frac{\rho\cos\omega}{1} - \frac{\rho^2\cos 2\omega}{2} + \frac{\rho^3 \cos 3\omega}{3} - \ldots,$$

которыя будутъ тѣмъ быстрѣе сходящіяся, чѣмъ ρ будетъ меньше, и которыя будутъ въ силѣ до тѣхъ поръ, пока ρ будетъ меньше 1. Для вычисленія должно умножить вторую формулу на модуль M обыкновенныхъ логариѳмовъ; слѣдуетъ кромѣ того замѣнить въ первой формулѣ θ чрезъ $\theta \sin 1''$, что сводится къ дѣленію правой части ея на $\sin 1''$; тогда, если ограничиваемся небольшимъ числомъ членовъ, можно написать $\sin 2''$, $\sin 3''$,..., вмѣсто $2\sin 1''$, $3\sin 1''$,..., и такимъ образомъ будемъ имѣть

$$(4)\quad \begin{cases} \theta = \frac{\rho\sin\omega}{\sin 1''} - \frac{\rho^2 \sin 2\omega}{\sin 2''} + \frac{\rho^3 \sin 3\omega}{\sin 3''} - \ldots, \\ \log\rho = M\left(\frac{\rho\cos\omega}{1} - \frac{\rho^2\cos 2\omega}{2} + \frac{\rho^3\cos 3\omega}{3} - \ldots\right). \end{cases}$$

Если замѣнимъ ω чрезъ $180° - \omega$, то формулы (3) примутъ видъ

$$(5)\quad \operatorname{tang}\theta = \frac{\rho\sin\omega}{1 - \rho\cos\omega}, \quad r = \sqrt{1 - 2\rho\cos\omega + \rho^2},$$

и, дѣлая ту же замѣну въ формулахъ (4), будемъ имѣть для вычисленія значеній θ и $\log r$

$$(6)\quad \begin{cases} \theta = \frac{\rho\sin\omega}{\sin 1''} + \frac{\rho^2 \sin 2\omega}{\sin 2''} + \frac{\rho^3 \sin 3\omega}{\sin 3''} + \ldots, \\ \log r = -M\left(\frac{\rho\cos\omega}{1} + \frac{\rho^2\cos 2\omega}{2} + \frac{\rho^3\cos 3\omega}{3} + \ldots\right). \end{cases}$$

Наконецъ, очень часто приходится вычислять уголъ x, опредѣляемый изъ уравненія вида

$$(7) \qquad tang\,x=\frac{1+m}{1-m}tang\,\alpha,$$

въ которомъ данное число m заключается, по предположенію, между -1 и $+1$. Будемъ имѣть

$$tang(x-\alpha)=\frac{tang\,x-tang\,\alpha}{1+tang\,x\,tang\,\alpha},$$

и если замѣнимъ $tang\,x$ его значеніемъ, опредѣленнымъ изъ заданнаго уравненія, то получимъ уравненіе

$$tang(x-\alpha)=\frac{m\sin 2\alpha}{1-m\cos 2\alpha},$$

подобное первому изъ уравненій (5); слѣдовательно, примѣняя первую формулу (6), будемъ имѣть

$$(8) \qquad x=\alpha+m\frac{\sin 2\alpha}{\sin 1''}+m^2\frac{\sin 4\alpha}{\sin 2''}+m^3\frac{\sin 6\alpha}{\sin 3''}+\ldots.$$

Эта послѣдняя формула была непосредственно выведена Лагранжемъ въ *Мемуарахъ Берлинской академіи наукъ* за 1776 годъ.

О прямолинейныхъ треугольникахъ, въ которыхъ два угла очень малы.

219. Задача I. — *Рѣшить прямолинейный треугольникъ, зная сторону c и углы A и B, по предположенію, очень малые.*

Такъ какъ углы A и B очень малые, то можемъ взять

$$\sin A=A-\tfrac{1}{6}A^3,\quad \sin B=B-\tfrac{1}{6}B^3,$$
$$\sin C=\sin(A+B)=A+B-\tfrac{1}{6}(A+B)^3;$$

формулы $a=\frac{c\sin A}{\sin C}$, $b=\frac{c\sin B}{\sin C}$ примутъ видъ

$$a=\frac{cA}{A+B}\frac{1-\frac{1}{6}A^2}{1-\frac{1}{6}(A+B)^2}$$
$$=\frac{cA}{A+B}\left(1-\frac{1}{6}A^2\right)\left[1+\tfrac{1}{6}(A+B)^2+\ldots\right],$$

$$b=\frac{cB}{A+B}\frac{1-\frac{1}{6}B^2}{1-\frac{1}{6}(A+B)^2}$$
$$\left[=\frac{cB}{A+B}\left(1-\frac{1}{6}B^2\right)\left[1+\frac{1}{6}(A+B)^2+\ldots\right]\right];$$

выполняя указанныя вычисленія и пренебрегая вездѣ членами четвертой степени относительно A и B, получимъ

$$a=\frac{cA}{A+B}\left(1+\frac{2AB+B^2}{6}\right),\quad b=\frac{cB}{A+B}\left(1+\frac{A^2+2AB}{6}\right),$$

откуда

$$a+b-c=\tfrac{1}{2}c.AB;$$

эти значенія будутъ точны до членовъ четвертаго порядка относительно A и B. Такъ какъ углы A и B даны въ секундахъ, то для вычисленія слѣдуетъ написать

$$a=\frac{cA}{A+B}\left(1+\frac{2AB+B^2}{6}\sin^2 1''\right),$$
$$b=\frac{cB}{A+B}\left(1+\frac{A^2+2AB}{6}\sin^2 1''\right);$$

каждая изъ частей a и b должна быть вычислена въ отдѣльности при помощи логариѳмовъ.

220. Задача II.—*Рѣшить прямолинейный треугольникъ, зная двѣ стороны a и b и уголъ между ними C, близкій, по предположенію, къ $180°$.*

Положимъ, что $C=180°-\theta$, гдѣ θ уголъ очень малый. Имѣемъ

$$c^2=a^2+b^2+2ab\cos\theta;$$

подставляя $1-\frac{\theta^2}{2}$ вмѣсто $\cos\theta$, получимъ

$$c^2=(a+b)^2-ab\theta^2 \quad\text{и}\quad c=(a+b)\left[1-\frac{ab}{(a+b)^2}\theta^2\right]^{\frac{1}{2}};$$

разлагая по формулѣ бинома и пренебрегая членами выше третьяго порядка относительно θ, получимъ

$$(1) \qquad c=a+b-\frac{1}{2}\frac{ab}{a+b}\theta^2.$$

Вычислимъ теперь A; имѣемъ

$$\sin A=\frac{a}{c}\sin C=\frac{a}{c}\sin\theta;$$

замѣняя c чрезъ его значеніе (1) и $\sin\theta$ чрезъ $\theta-\frac{\theta^3}{6}$, получимъ

$$\sin A=\frac{a}{a+b}\left(\theta-\frac{\theta^3}{6}\right)\left[1-\frac{1}{2}\frac{ab}{(a+b)^2}\theta^2\right]^{-1};$$

разлагая по формулѣ бинома и пренебрегая членами четвертой степени относительно θ, получимъ

$$\sin A=\frac{a\theta}{a+b}\left[1-\frac{a^2+b^2-ab}{(a+b)^2}\frac{\theta^2}{6}\right];$$

но такъ какъ уголъ C близокъ къ 180°, и, слѣдовательно, уголъ A очень малъ, то можемъ положить

$$A=\sin A+\frac{\sin^3 A}{6}.$$

Подставляя въ этой формулѣ предыдущее значеніе $\sin A$, получимъ значеніе

$$A=\frac{a\theta}{a+b}\left[1+\frac{b(a-b)}{(a+b)^2}\frac{\theta^2}{6}\right], \tag{2}$$

съ точностью до членовъ четвертаго порядка относительно θ; точно также найдемъ

$$B=\frac{b\theta}{a+b}\left[1-\frac{a(a-b)}{(a+b)^2}\frac{\theta^2}{6}\right]. \tag{3}$$

Для вычисленія слѣдуетъ въ формулахъ (1), (2), (3) замѣнить θ, A, B чрезъ $\theta\sin 1''$, $A\sin 1''$, $B\sin 1''$; тогда получимъ

$$c=a+b-\tfrac{1}{2}\frac{ab}{a+b}\theta^2\sin^2 1'',$$

$$A=\frac{a\theta}{a+b}\left[1+\frac{b(a-b)}{(a+b)^2}\frac{\theta^2\sin^2 1''}{6}\right],$$

$$B=\frac{b\theta}{a+b}\left[1-\frac{a(a-b)}{(a+b)^2}\frac{\theta^2\sin^2 1''}{6}\right].$$

Рѣшеніе прямолинейнаго треугольника, въ которомъ даны двѣ стороны и уголъ между ними.

221. Пусть будутъ даны стороны a и b, уголъ между ними C и предположимъ, что $a<b$. Нижеприведенное рѣшеніе относится къ случаю, когда $\frac{a}{b}$ очень мало, часто встрѣчающемуся въ астрономіи.

Для опредѣленія c и A имѣемъ двѣ формулы

$$c\sin A=a\sin C,\quad c\cos A=b-a\cos C,$$

откуда получаемъ

$$\operatorname{tang} A=\frac{\frac{a}{b}\sin C}{1-\frac{a}{b}\cos C},\qquad \frac{c}{b}=\sqrt{1-2\frac{a}{b}\cos C+\frac{a^2}{b^2}};$$

примѣняя здѣсь формулы (6) n° 218, получимъ

$$A=\frac{a}{b}\frac{\sin C}{\sin 1''}+\frac{a^2}{b^2}\frac{\sin 2C}{\sin 2''}+\frac{a^3}{b^3}\frac{\sin 3C}{\sin 3''}+\ldots,$$

$$\log c=\log b-M\left(\frac{a}{b}\cos C+\frac{a^2}{b^2}\frac{\cos 2C}{2}+\frac{a^3}{b^3}\frac{\cos 3C}{3}+\ldots\right);$$

что же касается угла B, то его вычислимъ по формулѣ

$$B=180^\circ-A-C.$$

Случай прямоугольнаго сферическаго треугольника, въ которомъ одинъ изъ острыхъ угловъ очень малъ.

222. *Дана гипотенуза a прямоугольнаго сферическаго треугольника и уголъ B, по предположенію очень малый; требуется вычислить сторону c.*

Имѣемъ

$$\operatorname{tang} c=\cos B\operatorname{tang} a, \tag{1}$$

откуда

$$\operatorname{tang} c=\frac{1-\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}B}{1+\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}B}\operatorname{tang} a;$$

примѣняя формулу (8) n° 218, получимъ

$$c=a-\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}B\frac{\sin 2a}{\sin 1''}+\operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}B\frac{\sin 4a}{\sin 2''}-\ldots. \tag{2}$$

Уравненіе (1) не измѣнится, если замѣнимъ a чрезъ $90^\circ-c$ и c чрезъ $90^\circ-a$; слѣдовательно, формула (2) будетъ справедлива, если мы въ ней сдѣлаемъ ту же замѣну; тогда она приметъ видъ

$$a=c+\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}B\frac{\sin 2c}{\sin 1''}+\operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}B\frac{\sin 4c}{\sin 2''}+\ldots;$$

эта новая формула опредѣляетъ гипотенузу a, когда извѣстны сторона c и уголъ B.

Случай сферическаго треугольника, въ которомъ двѣ стороны мало разнятся отъ квадранта.

223. *По тремъ даннымъ сторонамъ сферическаго треугольника вычислить одинъ изъ угловъ, предполагая, что стороны, образующія этотъ уголъ, мало чѣмъ разнятся отъ квадранта.*

Пусть будутъ b и c стороны, мало чѣмъ разнящіяся отъ квадранта; уголъ A, который требуется вычислить, мало разнится отъ a; слѣдовательно, если положимъ

$$b+c=180^\circ+2p,\quad b-c=2q,\quad A=a+x,$$

то числа p, q и x будутъ очень малы. Формула

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$

даетъ

$$\cos(a+x)=\frac{2\cos a+\cos 2p-\cos 2q}{\cos 2p+\cos 2q}$$

и

$$(1)\qquad \begin{cases} \cos a-\cos(a+x) \\ \quad =\dfrac{(1-\cos a)(1-\cos 2p)-(1+\cos a)(1-\cos 2q)}{\cos 2p+\cos 2q}. \end{cases}$$

Мы видимъ, что если разсматривать p и q какъ количества перваго порядка, то x будетъ второго порядка; и если желаемъ пренебречь количествами четвертаго порядка, то должны замѣнить $\cos 2p$ чрезъ $1-2p^2$ и $\cos 2q$ чрезъ $1-2q^2$ въ числителѣ правой части формулы (1) и привести эти косинусы къ единицѣ въ знаменателѣ той же правой части; кромѣ того лѣвая часть будетъ $x\sin a$ съ той же степенью точности. На основаніи этого формула (1) приметъ видъ

$$(2)\qquad x=p^2\tan g\tfrac{1}{2}a-q^2\cot\tfrac{1}{2}a;$$

но для вычисленія слѣдуетъ написать

$$(3)\qquad x=p^2\tan g\tfrac{1}{2}a\sin 1''-q^2\cot\tfrac{1}{2}a\sin 1''.$$

Формулою (3) можно съ выгодою пользоваться въ геодезическихъ вычисленіяхъ для приведенія угловъ къ горизонту; она скорѣе приводитъ къ цѣли и требуетъ менѣе обширныхъ таблицъ, чѣмъ формула перваго случая сферическихъ треугольниковъ; однако, когда углы p и q больше 1 или 2 градусовъ, то слѣдуетъ предпочесть общій способъ. Легко опредѣлить погрѣшность, которую мы дѣлаемъ,

пользуясь формулою (3). Съ этою цѣлью возьмемъ формулу (1), вполнѣ строгую, и произведемъ вычисленія съ приближеніемъ до членовъ шестого порядка исключительно; первую часть этой формулы замѣняемъ черезъ $x\sin a+\frac{x^2}{2}\cos a$, во второй части замѣнимъ въ числителѣ $\cos 2p$ и $\cos 2q$ чрезъ $1-2p^2+\frac{2p^4}{3}$ и $1-2q^2+\frac{2q^4}{3}$, но въ знаменателѣ эти косинусы замѣнимъ чрезъ $1-2p^2$ и $1-2q^2$. Слѣдовательно, будемъ имѣть

$$x=\frac{\tan g\tfrac{1}{2}a\left(p^2-\frac{p^4}{3}\right)-\cot\tfrac{1}{2}a\left(q^2-\frac{q^4}{3}\right)}{1-(p^2+q^2)}-\frac{x^2}{2}\frac{\cos a}{\sin a}.$$

Замѣняя $\frac{1}{1-(p^2+q^2)}$ чрезъ $1+p^2+q^2$, что возможно, и x^2 чрезъ его значеніе, полученное изъ формулы (2), найдемъ

$$x=p^2\tan g\tfrac{1}{2}a-q^2\cot\tfrac{1}{2}a+p^4\left(\tfrac{5}{12}\tan g\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{4}\tan g^3\tfrac{1}{2}c\right)$$
$$-q^4\left(\tfrac{5}{12}\cot\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{4}\cot^3\tfrac{1}{2}a\right)-\tfrac{1}{2}p^2q^2\left(\cot\tfrac{1}{2}a-\tan g\tfrac{1}{2}a\right).$$

Погрѣшность, которую мы сдѣлали, воспользовавшись формулою (3), будетъ, слѣдовательно, равна

$$p^4\sin^3 1''\left(\tfrac{5}{12}\tan g\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{4}\tan g^3\tfrac{1}{2}a\right)$$
$$-q^4\sin^3 1''\left(\tfrac{5}{12}\cot\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{4}\cot^3\tfrac{1}{2}a\right)$$
$$-\tfrac{1}{2}p^2q^2\sin^3 1''\left(\cot\tfrac{1}{2}a-\tan g\tfrac{1}{2}a\right),$$

и ее легко опредѣлить, разсмотрѣвъ самый большой изъ членовъ, входящихъ въ послѣднее выраженіе.

Рѣшеніе сферическаго треугольника по двумъ сторонамъ и углу между ними.

224. Первое рѣшеніе.—Пусть a и b будутъ данныя стороны и C данный уголъ. На основаніи формулъ Нэпера имѣемъ

$$\tan g\left(90^\circ+\frac{A-B}{2}\right)=\frac{1+\tan g\tfrac{1}{2}a\cot\tfrac{1}{2}b}{1-\tan g\tfrac{1}{2}a\cot\tfrac{1}{2}b}\tan g\tfrac{1}{2}C,$$

$$\tan g\left(90^\circ-\frac{A+B}{2}\right)=\frac{1-\tan g\tfrac{1}{2}a\tan g\tfrac{1}{2}b}{1+\tan g\tfrac{1}{2}a\tan g\tfrac{1}{2}b}\tan g\tfrac{1}{2}C,$$

и, примѣняя формулу (8) п° 218, получимъ

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{A-B}{2} = -90^\circ + \frac{1}{2}C + \dfrac{\tang\frac{1}{2}a}{\tang\frac{1}{2}b}\dfrac{\sin C}{\sin 1''} \\ \qquad + \dfrac{\tang^3\frac{1}{2}a}{\tang^2\frac{1}{2}b}\dfrac{\sin 2C}{\sin 2''} + \ldots, \\ \dfrac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}C + \tang\frac{1}{2}a\,\tang\frac{1}{2}b\,\dfrac{\sin C}{\sin 1''} \\ \qquad - \tang^2\frac{1}{2}a\,\tang^2\frac{1}{2}b\,\dfrac{\sin 2C}{\sin 2''} + \ldots. \end{cases}$$

Первый рядъ сходящійся, если $a<b$; но для того, чтобы второй рядъ былъ сходящійся, необходимо, чтобы $\tang\frac{1}{2}a\,\tang\frac{1}{2}b<1$ или $a+b<180^\circ$.

Для вычисленія c имѣемъ $\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$, откуда легко выводимъ

$$\sin^2\tfrac{1}{2}c=\sin^2\tfrac{1}{2}a\cos^2\tfrac{1}{2}b+\cos^2\tfrac{1}{2}a\sin^2\tfrac{1}{2}b - 2\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\times\cos\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos C,$$
$$\cos^2\tfrac{1}{2}c=\cos^2\tfrac{1}{2}a\cos^2\tfrac{1}{2}b+\sin^2\tfrac{1}{2}a\sin^2\tfrac{1}{2}b + 2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\times\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos C.$$

Изъ этихъ равенствъ мы видимъ, что $\sin\frac{1}{2}c$ есть третья сторона прямолинейнаго треугольника, двѣ другія стороны котораго будутъ $\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b$, $\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b$ и уголъ между ними C. Точно также $\cos\frac{1}{2}c$ будетъ третья сторона прямолинейнаго треугольника, двѣ другія стороны котораго будутъ $\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b$, $\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b$ и уголъ между ними $180^\circ-C$. Слѣдовательно, примѣняя здѣсь результатъ найденный въ n° 221, будемъ имѣть

$$(2)\quad \begin{cases} \log\sin\frac{1}{2}c=\log(\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b) \\ -M(\tang\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b\cos C+\frac{1}{2}\tang^2\frac{1}{2}a\cot^2\frac{1}{2}b\cos 2C+\ldots), \\ \log\cos\frac{1}{2}c=\log(\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b) \\ +M(\tang\frac{1}{2}a\,\tang\frac{1}{2}b\cos C-\frac{1}{2}\tang^2\frac{1}{2}a\,\tang^2\frac{1}{2}b\cos 2C+\ldots), \end{cases}$$

и, вычитая эти формулы одну изъ другой, получимъ значеніе $\log\tang\frac{1}{2}c$.

225. Второе рѣшеніе.—Очень изящнымъ рѣшеніемъ, которое мы только что показали, мы обязаны Лагранжу; формулы, къ которымъ оно приводитъ, не выражены въ такомъ видѣ, который позволилъ бы легко опредѣлить неизвѣстные элементы, когда одна изъ данныхъ сторонъ очень мала въ отношеніи къ другой. Необходимо получить изъ нихъ другія, которыя были бы расположены по степенямъ этой стороны, чего мы очень легко достигаемъ слѣдующимъ образомъ.

Складывая равенства (1), а затѣмъ вычитая одно изъ другого, получимъ

$$A=\frac{2\sin C}{\sin b\sin 1''}\tang\tfrac{1}{2}a+\frac{2\sin 2C\cot b}{\sin b\sin 1''}\tang^2\tfrac{1}{2}a + \frac{2\sin 3C(1+4\cot^2 b)}{3\sin b\sin 1''}\tang^3\tfrac{1}{2}a+\ldots,$$
$$B=180^\circ-C-\frac{2\sin C\cot b}{\sin 1''}\tang\tfrac{1}{2}a-\frac{\sin 2C(1+2\cot^2 b)}{\sin 1''}\tang^2\tfrac{1}{2}a - \frac{2\sin 3C\cot b(3+4\cot^2 b)}{3\sin 1''}\tang^3\tfrac{1}{2}a+\ldots.$$

Если предположимъ, что сторона a настолько мала, что возможно пренебречь степенями a выше третьей, то будемъ имѣть

$$\tang\tfrac{1}{2}a=\tfrac{1}{2}a\sin 1''+\tfrac{1}{24}a^3\sin^3 1'',$$

подставивъ это значеніе $\tang\frac{1}{2}a$ въ предыдущія уравненія и пренебрегая вездѣ четвертой степенью a, найдемъ

$$(3)\quad \begin{cases} A=a\dfrac{\sin C}{\sin b}+a^2\sin 1''\sin C\cos C\dfrac{\cot b}{\sin b} \\ \qquad +a^3\sin^2 1''\left(\frac{1}{3}\sin C\cos^2 C\dfrac{1+4\cot^2 b}{\sin b}-\frac{1}{3}\sin C\dfrac{\cot^2 b}{\sin b}\right), \\ B=180^\circ-C-a\sin C\cot b-\frac{1}{2}a^2\sin 1''\sin C\cos C(1+2\cot^2 b) \\ \qquad -a^3\sin^2 1''\left[\frac{1}{3}\sin C\cos^2 C\cot b(3+4\cot^2 b)\right. \\ \qquad\qquad \left.-\frac{1}{6}\sin C\cot b(1+2\cot^2 b)\right]. \end{cases}$$

Для вычисленія c мы воспользуемся одной изъ формулъ Делямбра, а именно

$$\sin\tfrac{1}{2}(c-b)=\sin\tfrac{1}{2}a\frac{\sin\frac{1}{2}(C-B)}{\cos\frac{1}{2}A},$$

или

$$\sin\tfrac{1}{2}(c-b)=\sin\tfrac{1}{2}a\sec\tfrac{1}{2}A\left(\sin C\sin\frac{180^\circ-B-C}{2} - \cos C\cos\frac{180^\circ-B-C}{2}\right).$$

Отсюда видимъ, что для вычисленія правой части съ той же самой степенью точности, съ которою вычисляемъ A и B, достаточно сохранить члены съ a^2 въ двухъ послѣднихъ множителяхъ. Имѣемъ

$$\sin\tfrac{1}{2}a=\tfrac{1}{2}a\sin 1''-\tfrac{1}{48}a^3\sin^3 1'',$$

и равенства (3) дадутъ, если пренебрежемъ членами, заключающими a^3,

$$\sec\tfrac{1}{2}A=1+\tfrac{1}{8}A^2\sin^2 1''=1+\tfrac{1}{8}a^2\sin^2 1''\frac{\sin^2 C}{\sin^2 b},$$

$$\frac{180°-B-C}{2}=\tfrac{1}{2}a\sin C\cot b+\tfrac{1}{4}a^2\sin 1''\sin C\cos C(1+2\cot^2 b),$$

$$\sin\frac{180°-B-C}{2}=\tfrac{1}{2}a\sin 1''\sin C\cot b+\tfrac{1}{4}a^2\sin^2 1''\sin C\cos C(1+2\cot^2 b),$$

$$\cos\frac{180°-B-C}{2}=1-\tfrac{1}{8}a^2\sin^2 1''\sin^2 C\cot^2 b.$$

На основаніи этихъ формулъ предыдущее значеніе $\sin\frac{1}{2}(c-b)$ приметъ видъ

$$\sin\tfrac{1}{2}(c-b)=-\tfrac{1}{2}a\sin 1''\cos C+\tfrac{1}{4}a^2\sin^2 1''\sin^2 C\cot b+\tfrac{1}{16}a^3\sin^3 1''[\cos C\sin^2 C(1+4\cot^2 b)+\tfrac{1}{3}\cos C];$$

наконецъ, имѣемъ

$$\tfrac{1}{2}(c-b)\sin 1''=\sin\tfrac{1}{2}(c-b)+\tfrac{1}{6}\sin^3\tfrac{1}{2}(c-b),$$

и такимъ образомъ находимъ, пренебрегая постоянно четвертою степенью a,

$$(4)\qquad \begin{cases} c=b-a\cos C+\frac{1}{2}a^2\sin 1''\sin^2 C\cot b \\ \qquad +a^3\sin^2 1''\cos C\sin^2 C(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cot^2 b). \end{cases}$$

Формулы (3) и (4) особенно удобны въ томъ случаѣ, когда можно пренебречь третьей степенью a.

Рѣшеніе сферическаго треугольника, стороны котораго очень малы.

226. Лежандръ далъ изящную теорему, на основаніи которой рѣшеніе сферическаго треугольника, стороны котораго въ отношеніи радіуса шара очень малы, приводится къ рѣшенію прямолинейнаго треугольника. Эта теорема, очень интересная сама по себѣ и очень полезная въ геодезическихъ вычисленіяхъ, можетъ быть выражена слѣдующимъ образомъ:

Если данъ сферическій треугольникъ, стороны котораго очень малы по отношенію къ радіусу R шара, и если построимъ прямолинейный треугольникъ, имѣющій тѣ же стороны, что и сферическій треугольникъ, то площади двухъ треугольниковъ будутъ равны съ точностью до членовъ второго порядка въ отношеніи $\frac{1}{R}$, а углы сферическаго треугольника будутъ равны, съ точностью до членовъ четвертаго порядка, угламъ прямолинейнаго треугольника, увеличеннымъ на треть сферическаго избытка.

Чтобы доказать эту теорему, обозначимъ чрезъ R радіусъ шара и чрезъ a, b, c стороны сферическаго треугольника, отнесенныя къ единицѣ произвольной длины; чрезъ A, B, C, какъ обыкновенно, обозначимъ противолежащіе углы. Сферическій треугольникъ, подобный данному и построенный на поверхности шара, котораго радіусъ равенъ единицѣ, имѣетъ стороны $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$, а потому, положивъ $a+b+c=2p$, будемъ имѣть

$$\sin\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin\frac{p-b}{R}\sin\frac{p-c}{R}}{\sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}}},\qquad \cos\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin\frac{p}{R}\sin\frac{p-a}{R}}{\sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}}},$$

кромѣ того имѣемъ

$$\sin\frac{p}{R}=\frac{p}{R}-\frac{p^3}{6R^3}+\ldots,\quad \sin\frac{p-a}{R}=\frac{p-a}{R}-\frac{(p-a)^3}{6R^3}+\ldots,$$

$$\sin\frac{p-b}{R}=\frac{p-b}{R}-\frac{(p-b)^3}{6R^3}+\ldots,\quad \sin\frac{p-c}{R}=\frac{p-c}{R}-\frac{(p-c)^3}{6R^3}+\ldots,$$

$$\sin\frac{b}{R}=\frac{b}{R}-\frac{b^3}{6R^3}+\ldots,\quad \sin\frac{c}{R}=\frac{c}{R}-\frac{c^3}{6R^3}+\ldots.$$

Если подставимъ эти значенія въ выраженія $\sin\frac{1}{2}A$ и $\cos\frac{1}{2}A$, отбросимъ члены четвертой степени относительно $\frac{1}{R}$ и, наконецъ, замѣтимъ, что при этой степени приближенія имѣемъ

$$\frac{1}{1-\frac{b^2+c^2}{6R^2}}=1+\frac{b^2+c^2}{6R^2},$$

то получимъ

$$\sin\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{1+\frac{p(p-a)}{3R^2}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\sqrt{1-\frac{(p-b)(p-c)}{3R^2}},$$

или, извлекая квадратный корень изъ вторыхъ множителей при помощи формулы бинома,

$$(1)\qquad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\left[1+\frac{p(p-a)}{6R^2}\right], \\ \cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\left[1-\frac{(p-b)(p-c)}{6R^2}\right]*). \end{cases}$$

*) Способъ, которому мы здѣсь слѣдуемъ, даетъ возможность непосредственно перейти отъ формулъ сферической тригонометріи къ форму-

Разсмотримъ теперь прямолинейный треугольникъ, стороны котораго a, b, c; пусть A', B', C' будутъ соотвѣтственно противолежащіе имъ углы и S' площадь этого треугольника. Будемъ имѣть

$$(2)\qquad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}A' = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \\ \cos\frac{1}{2}A' = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \end{cases}$$

и если составимъ произведенія

$$\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}A',\quad \cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}A',$$

а затѣмъ вычтемъ одно изъ другого, то, послѣ сокращенія, получимъ

$$\sin\tfrac{1}{2}(A-A') = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{6R^2} = \tfrac{1}{6}\frac{S'}{R^2};$$

наконецъ, будемъ имѣть съ той же степенью точности

$$\tfrac{1}{2}(A-A') = \sin\tfrac{1}{2}(A-A') = \tfrac{1}{6}\frac{S'}{R^2},$$

или

$$A = A' + \tfrac{1}{3}\frac{S'}{R^2}.$$

Слѣдовательно, будемъ имѣть три формулы

$$(3)\qquad \begin{cases} A = A' + \frac{S'}{3R^2}, \\ B = B' + \frac{S'}{3R^2}, \\ C = C' + \frac{S'}{3R^2}, \end{cases}$$

въ которыхъ углы A, B,... выражены при посредствѣ длинъ дугъ, измѣряющихъ ихъ въ окружности радіуса, равнаго 1. Складывая эти уравненія и замѣчая, что $A'+B'+C'=\pi$, получимъ

$$A+B+C = \pi + \frac{S'}{R^2}.$$

Слѣдовательно, если обозначимъ чрезъ S площадь сферическаго

ламъ прямолинейной тригонометріи. Напримѣръ, формулы (1), которыя точны только до членовъ 4-го порядка относительно $\frac{1}{R}$, становятся вполнѣ точными въ предѣлѣ для $R=\infty$ и онѣ тогда приводятъ съ соотвѣтственнымъ формуламъ прямолинейной тригонометріи.

треугольника, чрезъ ε сферическій избытокъ, вычисленный такимъ же образомъ, какъ и углы A, B, C, то будемъ имѣть

$$A+B+C-\pi = \varepsilon = \frac{S}{R^2};$$

слѣдовательно,

$$(4)\qquad S = S',$$

съ точностью до членовъ второго порядка относительно $\frac{1}{R}$ и равенства (3) примутъ тогда видъ

$$(5)\qquad \begin{cases} A = A' + \frac{\varepsilon}{3}, \\ B = B' + \frac{\varepsilon}{3}, \\ C = C' + \frac{\varepsilon}{3}, \end{cases}$$

что и требовалось доказать.

227. Мы можемъ, поступая подобнымъ же образомъ, получить какія намъ угодно приближенія; напримѣръ, если мы примемъ во вниманіе члены четвертаго порядка относительно $\frac{1}{R}$, но пренебрежемъ членами шестого порядка, то легко получимъ

$$A = A' + \frac{\varepsilon}{3} + \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2 \sin 1'' \frac{\sin^2 B' + \sin^2 C' - 2\sin^2 A'}{10\sin A'\sin B'\sin C'},$$

$$B = B' + \frac{\varepsilon}{2} + \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2 \sin 1'' \frac{\sin^2 C' + \sin^2 A' - 2\sin^2 B'}{10\sin A'\sin B'\sin C'},$$

$$C = C' + \frac{\varepsilon}{3} + \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2 \sin 1'' \frac{\sin^2 A' + \sin^2 B' - 2\sin^2 C'}{10\sin A'\sin B'\sin C'};$$

вмѣстѣ съ тѣмъ мы найдемъ съ точностью до членовъ четвертаго порядка

$$S = S'\left[1 + \frac{S'}{R^2}\frac{\sin^2 A' + \sin^2 B' + \sin^2 C'}{12\sin A'\sin B'\sin C'}\right].$$

228. Покажемъ теперь, какъ можно воспользоваться теоремой Лежандра.

1° *Даны три стороны a, b, c сферическаго треугольника.* Вычислимъ углы A', B', C' и площадь S' прямолинейнаго треугольника, стороны котораго a, b, c; получимъ $\varepsilon = \frac{S'}{R^2\sin 1''}$ и формулы (5) затѣмъ дадутъ A, B, C.

2° *Даны двѣ стороны a, b и уголъ между ними C.* Имѣемъ

$S'=\frac{1}{2}ab\sin C'$; но такъ какъ $C'=C-\frac{S}{3R^2}$, то $\sin C'$ отличается отъ $\sin C$ только членами порядка $\frac{1}{R^2}$ и, слѣдовательно, можно принять

$$S'=\tfrac{1}{2}ab\sin C \text{ и } \varepsilon=\tfrac{1}{2}\frac{ab}{R^2}\frac{\sin C}{\sin 1''}.$$

При помощи этой формулы вычислимъ ε и тогда третье равенство (5) опредѣлитъ C'; рѣшимъ прямолинейный треугольникъ, въ которомъ элементы a, b и C' извѣстны; такимъ образомъ получимъ c, C' и B'; равенства (5) дадутъ затѣмъ возможность опредѣлить A и B.

3° *Даны два угла A, B и сторона между ними c.*

Имѣемъ

$$S'=\frac{c^2}{2}\frac{\sin A'\sin B'}{\sin(A'+B')};$$

но мы можемъ принять

$$S'=\frac{c^2}{2}\frac{\sin A\sin B}{\sin(A+B)} \text{ и } \varepsilon=\frac{c^2}{2R^2}\frac{\sin A\sin B}{\sin(A+B)\sin 1''};$$

такъ какъ ε извѣстно, то изъ формулъ (5) получимъ A' и B'; вопросъ тогда приведется къ рѣшенію прямолинейнаго треугольника по даннымъ A', B' и c.

4° *Даны двѣ стороны a, b и уголъ A.*

Имѣемъ

$$S'=\tfrac{1}{2}ab\sin(A'+B');$$

но мы можемъ принять

$$S'=\tfrac{1}{2}ab\sin(A+B), \text{ откуда } \varepsilon=\frac{ab}{2R^2}\frac{\sin(A+B)}{\sin 1''};$$

уголъ B не данъ, но такъ какъ мы имѣемъ въ виду только опредѣленіе ε, то можно этотъ уголъ вычислить по приближенной формулѣ $\sin B=\frac{b}{a}\sin A$. Такъ какъ ε извѣстно, то при помощи первой формулы (5) будемъ имѣть A' и вопросъ приведется къ рѣшенію прямолинейнаго треугольника по даннымъ a, b и A'; формулы (5) дадутъ затѣмъ B и C.

5° *Даны два угла A и B и сторона a.*

Мы можемъ вычислить ε по формулѣ

$$\varepsilon=\frac{a^2}{2R^2}\frac{\sin B\sin(A'+B)}{\sin A\sin 1''};$$

затѣмъ изъ формулъ (5) будемъ имѣть A' и B' и вопросъ приводится къ рѣшенію прямолинейнаго треугольника по даннымъ A', B' и a.

229. Теорема Лежандра можетъ быть еще примѣнена къ рѣшенію сферическаго треугольника, двѣ стороны котораго мало отличаются отъ 180 градусовъ, такъ какъ, продолжая эти стороны до ихъ новой встрѣчи, образуемъ второй сферическій треугольникъ, стороны котораго очень малы. Рѣшивъ этотъ второй треугольникъ, въ которомъ мы будемъ всегда знать три элемента, легко затѣмъ получимъ элементы перваго треугольника.

Наконецъ этой же теоремой можно воспользоваться для рѣшенія сферическаго треугольника, въ которомъ два угла очень малы, такъ какъ въ этомъ случаѣ пополнительный треугольникъ имѣетъ двѣ стороны, которыя мало разнятся отъ 180 градусовъ.

Дифференціальныя тригонометричечскія формулы.

230. Когда рѣшенъ прямолинейный или же сферическій треугольникъ, то часто имѣютъ надобность знать всѣ измѣненія, которымъ подвергаются вычисленные элементы, когда самыя данныя испытываютъ нѣкоторыя измѣненія. Мы предположимъ, что эти измѣненія данныхъ будутъ достаточно малы для того, чтобы поступать съ ними, какъ съ безконечно малыми дифференціалами, т. е. что можемъ пренебречь при вычисленіи ихъ произведеніями и ихъ степенями; тогда мы можемъ, воспользовавшись правилами дифференціальнаго исчисленія, вычислить соотвѣтственныя измѣненія другихъ элементовъ при помощи очень простыхъ формулъ и такимъ образомъ не прибѣгать къ рѣшенію треугольника по новымъ даннымъ.

Прямолинейные треугольники.—Основныя формулы прямолинейной тригонометріи суть

$$\log a-\log\sin A=\log b-\log\sin B=\log c-\log\sin C,$$
$$A+B+C=180°.$$

Предположимъ, что три элемента, между которыми находится по крайней мѣрѣ одна сторона, получаютъ очень малыя приращенія, тогда другіе элементы будутъ принимать соотвѣтственныя приращенія; обозначимъ всѣ эти приращенія чрезъ характеристику δ и тогда предыдущія равенства дадутъ

$$\frac{\delta a}{a}-\cot A\,\delta A=\frac{\delta b}{b}-\cot B\,\delta B=\frac{\delta c}{c}-\cot C\,\delta C,$$
$$\delta A+\delta B+\delta C=0.$$

При помощи этихъ уравненій мы можемъ вычислить три варіаціи $\delta a,\ldots$, предполагая, что три другія извѣстны, однако, при условіи, чтобы между ними была варіація одной стороны; не слѣдуетъ забывать, что для вычисленія слѣдуетъ писать $\delta A \sin 1''$, $\delta B \sin 1''$, $\delta C \sin 1''$ вмѣсто δA, δB, δC.

Если даны δa и варіаціи угловъ, то для вычисленія δb и δc будемъ имѣть

$$(1)\quad \begin{cases} \delta b = \dfrac{b}{a}\,\delta a + b \sin 1''(\cot B\,\delta B - \cot A\,\delta A), \\ \delta c = \dfrac{c}{a}\,\delta a + c \sin 1''(\cot C\,\delta C - \cot A\,\delta A). \end{cases}$$

Если даны δa, δb и δA, то будемъ имѣть

$$(2)\quad \begin{cases} \delta B = -\dfrac{\operatorname{tang} B}{a \sin 1''}\,\delta a + \dfrac{\operatorname{tang} B}{b \sin 1''}\,\delta b + \dfrac{\operatorname{tang} B}{\operatorname{tang} A}\,\delta A, \\ \delta C = -\delta A - \delta B, \\ \delta c = \dfrac{1}{\cos B}\,\delta a - \dfrac{\cos C}{\cos B}\,\delta b - c \operatorname{tang} B \sin 1''\,\delta A. \end{cases}$$

Если даны δa, δb, δC, то будемъ имѣть

$$(3)\quad \begin{cases} \delta c = \cos B\,\delta a + \cos A\,\delta b + a \sin B \sin 1''\,\delta C, \\ \delta A = \dfrac{\sin B}{c \sin 1''}\,\delta a - \dfrac{\sin A}{c \sin 1''}\,\delta b - \dfrac{a \cos B}{c}\,\delta C, \\ \delta B = -\delta A - \delta C. \end{cases}$$

Наконецъ, если даны δa, δb и δc, то будемъ имѣть для вычисленія δA

$$(4)\quad \delta A = \frac{1}{c \sin B \sin 1''}\,\delta a - \frac{\cos C}{c \sin B \sin 1''}\,\delta b - \frac{\cos B}{c \sin B \sin 1''}\,\delta c;$$

мы можемъ получить, при помощи перестановки буквъ, двѣ другія подобныя формулы для вычисленія δB и δC.

231. Сферическіе треугольники.—Мы будемъ пользоваться, какъ и въ предыдущемъ, характеристикой δ для обозначенія варіацій элементовъ. Формула

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

даетъ

$$\begin{aligned} \sin a\,\delta a = {} & (\cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A)\,\delta b \\ & + (\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A)\,\delta c \\ & + \sin b \sin c \sin A\,\delta A, \end{aligned}$$

или, воспользовавшись формулами (3) п° 111,

$$(5)\quad \delta a = \cos C\,\delta b + \cos B\,\delta c + \sin c \sin B\,\delta A.$$

При помощи этой формулы получимъ, разсматривая треугольникъ пополнительный,

$$(6)\quad \delta A = -\cos c\,\delta B - \cos b\,\delta C + \sin c \sin B\,\delta a.$$

Формула

$$\log \sin A - \log \sin a = \log \sin B - \log \sin b$$

даетъ

$$(7)\quad \cot A\,\delta A - \cot a\,\delta a = \cot B\,\delta B - \cot b\,\delta b.$$

Наконецъ, формула

$$\cot a \sin b - \cot A \sin C = \cos b \cos C$$

даетъ

$$\frac{\sin C}{\sin^2 A}\,\delta A - (\cot A \cos C - \cos b \sin C)\,\delta C - \frac{\sin b}{\sin^2 a}\,\delta a + (\cot a \cos b + \sin b \cos C)\,\delta b = 0,$$

и, если умножимъ на $\sin A$,

$$(8)\quad \frac{\sin C}{\sin A}\,\delta A + \cos B\,\delta C - \frac{\sin B}{\sin a}\,\delta a + \cot c \sin C\,\delta b = 0.$$

При помощи формулъ (5), (6), (7), (8) и тѣхъ, которыя изъ нихъ получимъ чрезъ перестановку буквъ, мы можемъ выразить варіацію одного какого либо изъ шести элементовъ сферическаго треугольника въ функціи варіацій какихъ либо трехъ изъ остальныхъ пяти.

Разсмотримъ, напримѣръ, случай, когда даны двѣ стороны a, b и уголъ между ними C, случай чаще всего встрѣчающійся въ астрономіи. Будемъ имѣть значенія слѣдующихъ варіацій δc, δA, δB неизвѣстныхъ элементовъ:

$$\begin{aligned} \delta c &= \cos B\,\delta a + \cos A\,\delta b + \sin b \sin A\,\delta C, \\ \delta A &= \frac{\sin B}{\sin c}\,\delta a - \cot c \sin A\,\delta b - \frac{\cos B \sin A}{\sin C}\,\delta C, \\ \delta B &= -\cot c \sin B\,\delta a + \frac{\sin A}{\sin c}\,\delta b - \frac{\cos A \sin B}{\sin C}\,\delta C. \end{aligned}$$

Весьма часто бываетъ важно въ разсматриваемомъ нами случаѣ, чтобы варіаціи δc и δA были выражены въ функціи элементовъ b, c и A; можно, однако, оставить $\sin a$ множителемъ въ коэффиціентахъ δa; тогда слѣдуетъ воспользоваться слѣдующими формулами, которыя легко выводятся изъ тѣхъ, которыя мы только что написали:

$$\begin{aligned} \delta c = {} & \frac{1}{\sin a}(\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A)\,\delta a \\ & + \cos A\,\delta b + \sin b \sin A\,\delta C, \end{aligned}$$

$$\partial A = \frac{1}{\sin a}\frac{\sin b \sin A}{\sin c}\partial a - \sin A \cot C \partial b$$
$$-(\cos b - \sin b \cot c \cos A)\partial C.$$

232. Если предположимъ, что варіаціи данныхъ будутъ именно погрѣшностями этихъ данныхъ, то предыдущія формулы дадутъ возможность опредѣлить соотвѣтственныя погрѣшности вычисленныхъ элементовъ; точно также этими формулами можно воспользоваться для опредѣленія степени точности, которой можно достигнуть въ результатахъ тригонометрическихъ вычисленій, произведенныхъ по неточнымъ даннымъ.

Вычисленія триангуляціи состоятъ, какъ мы это видѣли (Глава III), въ рѣшеніи цѣлой серіи треугольниковъ, въ которыхъ извѣстна сторона и углы; примѣнимъ формулы (1) къ одному изъ этихъ треугольниковъ, по предположенію, прямолинейному. Соотвѣтственная погрѣшность данной стороны $\frac{\partial a}{a}$ относится цѣликомъ къ каждой изъ вычисленныхъ сторонъ b и c, и къ этимъ погрѣшностямъ кромѣ того относятся погрѣшности угловъ. Изъ формулъ (1) мы видимъ, что данная погрѣшность, которая допущена въ одномъ изъ угловъ, тѣмъ менѣе будетъ имѣть вліянія, чѣмъ менѣе этотъ уголъ будетъ отличаться отъ 90 градусовъ, и что погрѣшность, о которой идетъ рѣчь, не будетъ имѣть никакого вліянія, если соотвѣтственный уголъ равенъ именно 90 градусамъ. Но такъ какъ углы прямолинейнаго треугольника не могутъ быть всѣ три равны 90 градусамъ, то мы видимъ, что самый благопріятный случай будетъ тотъ, когда всѣ три угла равны 60°; на практикѣ при съемкѣ плановъ разсматриваютъ также равносторонніе треугольники, какъ самые выгодные, и никогда не допускаютъ треугольниковъ, у которыхъ одинъ изъ угловъ былъ бы меньше 30 градусовъ.

Дифференціальныя формулы, относящіяся до сферическихъ треугольниковъ, очень часто употребляются въ астрономіи. Онѣ въ особенности полезны въ вопросахъ, которые относятся къ вліяніямъ дѣйствій прецессіи, нутаціи и аберраціи на кажущееся положеніе звѣздъ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ ТЕОРІИ КРУГОВЫХЪ ФУНКЦІЙ.

	стр.
Опредѣленіе слова функція	1
Измѣреніе длины	1
О дугахъ круга	2
Опредѣленіе тригонометрическихъ линій	4
Измѣненіе тригонометрическихъ линій	6
О дугахъ, соотвѣтствующихъ данной тригонометрической линіи	10
Соотношенія между тригонометрическими линіями одной и той же дуги.	13
Формулы, относящіяся къ сложенію дугъ	17
Важнѣйшія формулы, выводимыя изъ формулъ, относящихся къ сложенію дугъ	22
Умноженіе дугъ	25
Дѣленіе дугъ	28
Опредѣленіе тригонометрическихъ линій нѣкоторыхъ дугъ	37
Замѣчанія о соотношеніяхъ между различными тригонометрическими линіями	45
Упражненія	49

ГЛАВА ВТОРАЯ.

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХЪ ТАБЛИЦАХЪ.

Предварительныя теоремы	51
Дѣленіе окружности	54
Составленіе таблицы синусовъ и косинусовъ	55
Таблицы логариѳмовъ круговыхъ функцій	62
Расположеніе таблицъ Каллета	63
Употребленіе таблицъ	64
Приведеніе формулъ къ виду, удобному для логариѳмированія	74
Рѣшеніе уравненій второй степени посредствомъ тригонометрическихъ таблицъ	76
Рѣшеніе уравненій третьей степени посредствомъ тригонометрическихъ таблицъ	79
Упражненія	86

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ТРИГОНОМЕТРІЯ.

стр.

Предметъ прямолинейной тригонометріи 88
Измѣреніе угловъ 88
Соотношенія между углами и сторонами въ прямоугольномъ треугольникѣ 90
Соотношенія между углами и сторонами въ косоугольномъ треугольникѣ 91
Другія формулы, относящіяся до косоугольныхъ треугольниковъ . . . 97
Выраженіе площади треугольника и радіусовъ круговъ вписаннаго и описаннаго 99
Рѣшеніе прямоугольныхъ треугольниковъ 102
Рѣшеніе прямолинейнаго треугольника по данной сторонѣ и двумъ угламъ 104
Рѣшеніе прямолинейнаго треугольника по даннымъ двумъ сторонамъ и углу, противолежащему одной изъ нихъ 105
Рѣшеніе прямолинейнаго треугольника по даннымъ двумъ сторонамъ и углу между ними 109
Рѣшеніе прямолинейнаго треугольника по даннымъ тремъ сторонамъ . 112
Различные случаи, когда даны не только стороны или углы треугольника 114
О вписанномъ четыреугольникѣ 118
Дѣйствія на мѣстности 121
Задачи практической тригонометріи 124
Упражненія 133

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРІЯ.

Предметъ сферической тригонометріи 135
Соотношенія между углами и сторонами сферическаго треугольника . 135
О пополнительномъ треугольникѣ 141
Формулы, относящіяся къ прямоугольнымъ треугольникамъ 142
Формулы, относящіяся къ прямостороннимъ треугольникамъ 147
Употребленіе вспомогательныхъ угловъ въ сферической тригонометріи. 147
Общія формулы, удобныя для логариѳмированія 148
Различныя выраженія для сферическаго избытка. Новыя формы . . . 153
Выраженія для радіуса круга описаннаго и радіусовъ круговъ вписаннаго и извнѣвписанныхъ 157
Рѣшеніе прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ 160
Рѣшеніе сферическихъ прямостороннихъ треугольниковъ 164

стр.

Замѣчаніе о рѣшеніи какихъ бы то ни было сферическихъ треугольниковъ 167
Рѣшеніе сферическаго треугольника, въ которомъ извѣстны три стороны или три угла 168
Рѣшеніе сферическаго треугольника, въ которомъ извѣстны двѣ стороны и уголъ между ними, или два угла и сторона между ними 171
Рѣшеніе сферическаго треугольника, въ которомъ даны двѣ стороны и уголъ, противолежащій одной изъ нихъ, или два угла и сторона, противолежащая одному изъ нихъ 175
Изслѣдованіе случаевъ, допускающихъ два рѣшенія 184
Задачи по сферической тригонометріи 187
Упражненія 191

ГЛАВА ПЯТАЯ.

ДОПОЛНЕНІЕ КЪ ТЕОРІИ КРУГОВЫХЪ ФУНКЦІЙ.

О мнимыхъ выраженіяхъ 193
Дѣйствія надъ мнимыми выраженіями. Формула Моавра для цѣлаго и положительнаго показателя 195
Умноженіе дугъ 197
Дѣленіе дугъ 199
Рѣшеніе двучленнаго уравненія $z^m=1$ 202
О правильныхъ многоугольникахъ 206
Рѣшеніе двучленныхъ уравненій общаго вида 212
Рѣшеніе трехчленныхъ уравненій 214
Формула Моавра для всякаго показателя 215
Теоремы Моавра и Котеса 216
Выраженія степеней синуса и косинуса дуги въ линейныхъ функціяхъ синусовъ и косинусовъ дугъ, кратныхъ данной дуги 218
Выраженія для *sinma* и *cosma* въ функціяхъ *sina* или *cosa* 220
Разложенія функцій *sinx* и *cosx* въ ряды по возрастающимъ степенямъ *x* 228
Разложенія функцій *cosx* и *sinx* на произвольное, но ограниченное число множителей 232
Разложенія функцій *cosx* и *sinx* на безпредѣльное число множителей. 234
Разложенія функцій *tangx* и *cotx* на произвольное, но ограниченное число дробей 237
Разложенія функцій *tangx* и *cotx* на безконечное число простыхъ дробей 240
Разложенія функцій *cosecx* и *secx* на безконечное число простыхъ дробей 243
Разложеніе функцій *tangx* и *cotx* въ ряды, расположенные по восходящимъ степенямъ *x* 244
Разложенія функцій *cosecx* и *secx* въ ряды, расположенные по восходящимъ степенямъ *x* 253
О круговыхъ функціяхъ мнимыхъ перемѣнныхъ 255
О гиперболическихъ косинусахъ и синусахъ 266

стр.

Разложеніе функцій $log(1+z)$ и $arc\,tang\,x$ въ ряды по восходящимъ степенямъ z 268
Вычисленіе отношенія окружности къ діаметру 275
Формулы, относящіяся къ вычисленію логариѳмовъ. Модуль обыкновенныхъ логариѳмовъ 276
Разложенія функцій $cos\,mx$ и $sin\,mx$ въ ряды по восходящимъ степенямъ $sin\,x$ 278
Разложеніе функцій $arc\,sin\,z$ въ рядъ по возрастающимъ степенямъ z . 281
Разложеніе функцій $log\,sin\,x$ и $log\,cos\,x$ въ ряды по восходящимъ степенямъ x 283
Разложенія въ ряды или въ безконечныя произведенія круговыхъ функцій мнимыхъ перемѣнныхъ 287

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

РѢШЕНІЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ ПРИ ПОМОЩИ РЯДОВЪ И ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХЪ ФОРМУЛЪ.

О выраженіи угла при вычисленіи 297
Перечень формулъ, выражающихъ разложенія круговыхъ функцій въ ряды 298
О прямолинейныхъ треугольникахъ, въ которыхъ два угла очень малы. 300
Рѣшеніе прямолинейнаго треугольника, въ которомъ даны двѣ стороны и уголъ между ними 303
Случай прямоугольнаго сферическаго треугольника, въ которомъ одинъ изъ острыхъ угловъ очень малъ 303
Случай сферическаго треугольника, въ которомъ двѣ стороны мало разнятся отъ квадранта 304
Рѣшеніе сферическаго треугольника по двумъ сторонамъ и углу между ними 305
Рѣшеніе сферическаго треугольника, стороны котораго очень малы . 308
Дифференціальныя тригонометрическія формулы 313

Ουρανο ανω ουρανο κατω
Αστερα ανω αστερα κατω
Παντανω ταυτουτο κατω
Ταυτα λαβε και ευτυχε

Небо-вверху, небо-внизу
Звезды-вверху, звезды-внизу
Все-что вверху, [illegible]

уководство къ живописи (иллюстрированное изданіе) масляными красками, стелью, и акварелью. Соч. Кар. Роберъ. Переводъ съ французскаго подъ редакціею худож-ка Венига, съ рисунками въ текстѣ. Спб. 1900 г. Ц. 1 руб. 50 к.

уководство къ практической фотографіи. Д-ръ А. Митэ, проф. при кор. Техн. Уч. Берлинѣ. Съ послѣдняго дополненнаго и исправленнаго нѣмецкаго изданія. Переводъ Буяко-ча и Остермана, подъ редакціей инж.-тех. Д. Сухаржевскаго. Съ 174 рисунками, 1903 г. 1 руб. 50 к.

ументальное фотографированіе ручными камерами общедоступное, для всякаго люби-ія, руководство, составилъ фотографъ Буяковичъ, съ 53 рис. Спб. 1901 г. Ц. 40 к.

кусство увеличенія на бумагахъ и пластинкахъ, полное руководство для полученія еличенныхъ портретовъ, группъ, воспроизведеній фотографическимъ способомъ, сост. д-ръ тольцъ. Перевелъ съ нѣмецкаго фотографъ и электротехникъ Г. Н. Буяковичъ, членъ V Отд. ип. Технич. Общества. съ 77 рис. Ц. 60 к.

раткое практическое руководство къ фотографіи. Съ 24 рисунками. Сост. Г. Н. яковичъ. Спб. Ц. 1 руб.

отографическая ретушь. Раскрашиваніе фотографій. Сост. Мектаторъ, перевелъ фото-афъ Г. Н. Буяковичъ. Спб. 1900 г. Ц. 40 к.

олярно-мебельное мастерство. Практическое руководство для любителей и самообу-нія. Составилъ техн. П. А. Федоровъ, съ 400 рис. въ текстѣ. Ц. 1 р. 35 к.

уководство къ гальваностегіи и гальванопластикѣ, составленное начальникомъ мическаго отдѣленія Техническаго музея въ Нюренѣ, д-ромъ Гансомъ Штокмейэромъ. Пере-лъ электротехникъ Г. Н. Буяковичъ. Со многими рисунками. Спб. 1907 г. Ц. 1 р. 20 к.

отничное искусство. Изложенное инженеръ-полковникомъ Дементьевымъ. Четвертое из-ніе. Въ большую 8-ю долю листа, съ 212 рис. въ текстѣ на лучшей глазированной бумагѣ. б. Ц. 1 руб.

омашній токарь. Практическое руководство для ручного точенія по дереву, металламъ, сти, рогу и черепахѣ. По Валикуру и др., составилъ техн. П. А. Федоровъ. Съ 200 рис. въ кстѣ. Спб. Ц. 1 руб. 35 к.

еревянная посуда. Практическое руководство для ручного производства бочекъ, чановъ, церъ, лоханокъ, рѣшетъ, ситъ, чашекъ и ложекъ. Инженера Раймонда Бріоне, перевелъ и полнилъ техн. П. А. Федоровъ, съ 225 рис. въ текстѣ. Спб. Ц. 1 руб.

омашній переплетчикъ. Практическое руководство къ переплетному мастерству для лю-телей и самообученію по Adam, Bosquet, Lenormand и др. Составилъ техн. П. А. Федоровъ, 150 рис. въ текстѣ. Спб. Ц. 1 руб. Переплетное мастерство, какъ извѣстно, принадлежитъ числу весьма полезныхъ занятій для юношества въ часы досуга отъ научныхъ занятій въ олѣ и дома. Какъ домашнее занятіе, оно не требуетъ большихъ затратъ на нужные инстру-енты, интересуетъ не только учащихся въ учебныхъ заведеніяхъ, но и вообще любителей ниги и переплета.

рактическій маляръ и живописецъ. Р. Торминъ. Полное наставленіе всѣхъ маляр-ныхъ работъ по камню, штукатуркѣ, дереву и металламъ, разрисовка потолковъ и стѣнъ, при-товленіе красокъ, лакировка, бронзировка и проч. Переводъ съ послѣдняго (7) нѣмецкаго данія. В. Д. Дмитріева, 300 стр. Ц. 1 руб.

оздухъ, вода, свѣтъ и тепло. Весьма общедоступн. лекціи по химіи проф. Р. Блох-на, переводъ В. Вольфсона, 103 рис. Спб. Ц. 40 к. Предлагаемая книжка содержитъ изло-женіе въ самой общедоступной формѣ важнѣйшихъ химическихъ свѣдѣній, крайне интерес-ныхъ вообще, но пріобрѣтающихъ особый интересъ еще потому, что они составляютъ основу изни нашего тѣла. Опыты, которыми поясняется изложеніе, просты и очень наглядны; многіе ъ нихъ могутъ быть воспроизведены домашними способами, при помощи самыхъ нехитрыхъ риспособленій.

ентиляція и отопленіе общественныхъ зданій и жилыхъ помѣщеній. Практическое руко-дство для архитекторовъ, техниковъ и хозяевъ. Сост. инж. Флавицкій. Спб. Ц. 1 р.

рактическое руководство къ живописи масляными красками, акварелью, по дереву: ески, миніатюры, брызганье по дереву, живопись на шелку, на глинѣ, живопись портретная ландшафтная, живопись на стеклѣ. Школа рисованія. Соч. проф. Ф. Дитриха. Перев. съ 16 мецк. изд., класснаго художника И. А. Посса. Спб. 1903 г. Ц. 1 р.

бработка металловъ и дерева. Общедоступное руководство для школъ и самообученія. ставилъ по сочиненіямъ Гроке и Крамарша, П. Соколовъ, съ 91 рис., 2-е изд. исправленное. 1902 г. 255 стр. Ц. 1 руб. 35 к. 1-е изданіе внесено въ каталогъ Мин. Нар. Просвѣщ.

бработка металловъ. Справочная книжка для подмастеровъ и молодыхъ рабочихъ, Траута. одъ со второго изданія Д. А. Скрябина. Артиллерійскій Комитетъ, имѣя въ виду, что въ ревед енной на русскій языкъ книгѣ Г. Траута „Обработка матеріаловъ“ помѣщено много кихъ технических указаній, которыя могутъ быть полезны при справкахъ по кузнечному, ейному, слесарному мастерствамъ, а также токарному, винторѣзному дѣламъ и по установкѣ